Prüfung Analysis

1. Teil: Rechnungen

1. a) [1 *Punkt*] Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$.

Mittels der Substitution $t = -\frac{1}{x}$ (womit $\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$) erhält man

$$\int \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \mathrm{e}^t + C = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + C.$$

b) [1 *Punkt*] Berechnen Sie das Integral $\int_0^{2\pi} x\sin(2018x)\mathrm{d}x$.

Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} x\sin(2018x)\mathrm{d}x &= \left[-\tfrac{1}{2018}x\cos(2018x)\right]_0^{2\pi} + \tfrac{1}{2018}\int_0^{2\pi}\cos(2018x)\mathrm{d}x \\ &= \left[-\tfrac{1}{2018}x\cos(2018x)\right]_0^{2\pi} = -\tfrac{1}{2018}2\pi\cos(2018\cdot 2\pi) \\ &= -\tfrac{2\pi}{2018} = -\tfrac{\pi}{1009}.\end{aligned}$$

c) [1 *Punkt*] Berechnen Sie das Integral $\int \frac{1}{x^2-x-2}\mathrm{d}x$ mit Partialbruchzerlegung.

Es gilt

$$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{-\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-x-2}\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{3}\int \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{3}\log|x+1| + \tfrac{1}{3}\log|x-2| + C \\ &= \tfrac{1}{3}\log\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.\end{aligned}$$

d) [1 *Punkt*] Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\searrow 0}\frac{x^3}{x-\sin(x)\cos(x)}$.

Es gilt nach der Regel von de l'Hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{x\searrow 0}\frac{x^3}{x-\sin(x)\cos(x)} &= \lim_{x\searrow 0}\frac{3x^2}{1-\cos(x)^2+\sin(x)^2} = \lim_{x\searrow 0}\frac{3x^2}{2\sin(x)^2} \\ &= \frac{3}{2}\left(\lim_{x\searrow 0}\frac{x}{\sin(x)}\right)^2 = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

e) [1 *Punkt*] Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n\sqrt{n}x^n$.

Bitte wenden!

Der Konvergenzradius R erfüllt

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n \sqrt{n}} = 3 \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}^{\frac{1}{2}} = 3$$

und somit $R = \frac{1}{3}$.

2. [3 *Punkte*] Berechnen Sie die Taylor-Approximation 3-ter Ordnung der Funktion

$$(x, y) \mapsto (x + y)\cos(2x)$$

um den Ursprung $(0, 0)^t$.

Die Taylor-Reihe von $\cos$ um den Ursprung ist durch

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

und demnach

$$\cos(2x) = 1 - \frac{4x^2}{2} + \dots = 1 - 2x^2 + \dots$$

Für die gegebene Funktion ergibt sich also

$$\begin{aligned}(x + y)\cos(2x) &= (x + y)\Big(1 - 2x^2 + \dots\Big) \\ &= x + y - 2x^3 - 2yx^2 + \dots\end{aligned}$$

Alternativ (!) lässt sich obige Taylor-Approximation mittels Berechnung einiger Ableitungen erhalten. Es gilt für $f(x, y) = (x + y)\cos(2x)$

$$\begin{aligned}\partial_x f &= \cos(2x) - 2(x + y)\sin(2x) \\ \partial_y f &= \cos(2x) \\ \partial_x^2 f &= -2\sin(2x) - 2\sin(2x) - 4(x + y)\cos(2x) \\ &= -4\sin(2x) - 4(x + y)\cos(2x) \\ \partial_x^3 f &= -8\cos(2x) - 4\cos(2x) + 8(x + y)\sin(2x) \\ &= -12\cos(2x) + 8(x + y)\sin(2x) \\ \partial_x\partial_y f &= -2\sin(2x) \\ \partial_x^2\partial_y f &= -4\cos(2x) \\ \partial_y^2 f = \partial_y^3 f &= \partial_x\partial_y^2 f = 0.\end{aligned}$$

und bei $(0, 0)$

$$f(0,0) = 0,\ \partial_x f(0,0) = 1,\ \partial_y f(0,0) = 1,\ \partial_x^2 f(0,0) = 0,\ \partial_x\partial_y f(0,0) = 0$$
$$\partial_x^3 f(0,0) = -12,\ \partial_x^2\partial_y f(0,0) = -4.$$

Siehe nächstes Blatt!

Somit ist nach dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned}(x+y)\cos(2x) &= x+y+\tfrac{1}{3!}(-12)x^3+\tfrac{1}{2!\,1!}(-4)x^2y+\dots\\ &= x+y-2x^3-2yx^2+\dots\end{aligned}$$

3. [3 *Punkte*] Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 2y+\sin(x), \quad y(0)=\tfrac{1}{2}.$$

Die allgemeine Lösung ist $y_a = \mathrm{e}^{2x}$. Für die partikuläre Lösung kann man entweder nach Variation der Konstanten das Integral $\int \sin(x)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$ berechnen oder den Ansatz $y_p = A_1\sin(x)+A_2\cos(x)$ wählen. Mit dem Ansatz ergibt sich

$$y_p' = A_1\cos(x)-A_2\sin(x) = 2A_1\sin(x)+2A_2\cos(x)+\sin(x)$$

und damit die Gleichungen $A_1 = 2A_2$ und $-A_2 = 2A_1+1$. Es ist somit $A_1 = -\frac{2}{5}$ und $A_2 = -\frac{1}{5}$. Die Lösung der Differentialgleichung ist also von der Form

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-2x}-\tfrac{2}{5}\sin(x)-\tfrac{1}{5}\cos(x)$$

für $C\in\mathbb{R}$. Mit dem Anfangswert ergibt sich $C = \frac{1}{2}+\frac{1}{5} = \frac{7}{10}$.

4. [5 *Punkte*] Berechnen Sie das Flussintegral $\int_S f\cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ des Vektorfelds

$$f(x,y,z) = \Big(-x+\sin(z)x^2, -2xy\sin(z)+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2\sin(x)}, \cos\Big(\tfrac{x+y}{(x+y)^2+1}\Big)-z^2\Big)$$

durch die Fläche $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x+1)^2+y^2+z^2 = 1\}$.

Wir berechnen die Divergenz

$$\operatorname{div}(f) = \big(-1+2\sin(z)x\big)+\big(-2x\sin(z)\big)+\big(-2z\big) = -1-2z.$$

Sei B der von S eingeschlossene Ball. Nach dem Divergenzsatz ist

$$\int_S f\cdot \mathrm{dn} = \int_B \operatorname{div}(f)\mathrm{dvol} = \int_B (-1-2z)\,\mathrm{dvol}(x,y,z).$$

Da B symmetrisch ist bezüglich der Spiegelung $(x,y,z)\mapsto(x,y,-z)$ und die Abbildung $(x,y,z)\mapsto z$ bezüglich dieser Spiegelung das Vorzeichen wechselt, ist

$$\int_B (-2z)\,\mathrm{dvol}(x,y,z) = 0.$$

Somit ist

$$\int_S f\cdot\mathrm{dn} = \int_B(-1-2z)\,\mathrm{dvol}(x,y,z) = -\int_B 1\mathrm{dvol} = -\mathrm{vol}(B) = -\tfrac{4}{3}\pi.$$

Bitte wenden!

5. [6 *Punkte*] Finden Sie den achsenparallelen Quader Q im Einheitsball mit Eckpunkten auf der Sphäre $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$, für welchen das Integral $\int_Q x^2 \mathrm{dvol}(x,y,z)$ maximal wird.

Für einen Quader $Q = [-a,a]\times[-b,b]\times[-c,c]$ mit $a,b,c \geq 0$ mit $a^2+b^2+c^2 = 1$ berechnen wir

$$\int_Q x^2 \mathrm{dvol}(x,y,z) = (2c)(2b)\int_{-a}^{a} x^2 \mathrm{d}x = \tfrac{8}{3}a^3bc.$$

Wir maximieren also die Funktion $(a,b,c) \mapsto a^3bc$ über die Einheitssphäre. Für die Lagrange-Funktion

$$L(a,b,c,\lambda) = a^3bc - \lambda(a^2+b^2+c^2-1).$$

lösen wir also

$$\partial_a L = 3a^2bc - 2a\lambda = 0, \tag{1}$$
$$\partial_b L = a^3c - 2b\lambda = 0, \tag{2}$$
$$\partial_c L = a^3b - 2c\lambda = 0 \tag{3}$$

sowie $a^2+b^2+c^2 = 1$. Da $a \neq 0$ ist (sonst wäre das Integral über den entsprechenden Quader Null), gilt $3abc - 2\lambda = 0$ oder in anderen Worten

$$\lambda = \tfrac{3}{2}abc.$$

Die Gleichungen (2), (3) ergeben somit

$$a^3c = 2b\lambda = 3b^2ac, \quad a^3b = 3abc^2$$

oder äquivalenterweise

$$a^2 = 3b^2 = 3c^2.$$

Einsetzen in $a^2+b^2+c^2 = 1$ ergibt $5b^2 = 1$, das heisst, $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und somit $c = b = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. Der gesuchte Quader ist also

$$Q = [-\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}] \times [-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}] \times [-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}].$$

Siehe nächstes Blatt!

2. Teil: Anwendung der Theorie

6. $[5$ *Punkte*$]$ Sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) $[1$ *Punkt*$]$ Definieren Sie den Begriff von Cauchy-Folgen und den Begriff der Vollständigkeit für X.

Eine Cauchy-Folge $(x_n)_n$ in X ist eine Folge, für die für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{d}(x_n, x_m) < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$ existiert. Der metrische Raum X ist vollständig, falls jede Cauchy-Folge konvergent ist.

b) $[2$ *Punkte*$]$ Zeigen Sie, dass eine Cauchy-Folge in X genau dann konvergent ist, wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt.

Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge. Falls $(x_n)_n$ konvergiert, besitzt $(x_n)_n$ sicherlich eine konvergente Teilfolge. Sei nun $(x_{n_k})_k$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert x von $(x_n)_n$; wir wollen zeigen, dass $(x_n)_n$ gegen x konvergiert. Sei $\epsilon > 0$ und sei $N \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{d}(x_n, x_m) < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$. Weiter sei $K \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{d}(x_{n_k}, x) < \epsilon$ für alle $k \geq K$. Sei $M = \max\{N, n_K\}$ und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $n_k \geq M$. Für $n \geq M$ gilt

$$\mathrm{d}(x_n, x) \leq \mathrm{d}(x_n, x_{n_k}) + \mathrm{d}(x_{n_k}, x) < 2\epsilon,$$

womit $(x_n)_n$ gegen x konvergiert.

c) $[2$ *Punkte*$]$ Angenommen X ist folgenkompakt. Zeigen Sie, dass X vollständig ist.

Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in X. Da X folgenkompakt ist, besitzt $(x_n)_n$ eine konvergente Teilfolge, womit $(x_n)_n$ nach b) konvergieren muss.

7. a) $[1$ *Punkt*$]$ Formulieren Sie den Integraltest für Reihen.

Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine monoton fallende Funktion. Dann gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Insbesondere konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert. Dies gilt analog für Integrale der Form $\int_N^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ für $N \in \mathbb{N}$.

b) $[5$ *Punkte*$]$ Verwenden Sie den Beweis des Integraltests, um zu zeigen, dass die Asymptotik

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{N} + \mathcal{O}(1)$$

für $N \to \infty$ gilt, oder in anderen Worten, dass $\left|2\sqrt{N} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}\right|$ durch eine von N unabhängige Konstante beschränkt ist.

Bitte wenden!

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [n, n+1]$ gilt $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Insbesondere ist für $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Nach Summation über n bis zu $N-1$ für $N \geq 2$

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

oder in anderen Worten

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \int_1^N \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = 2\sqrt{N} - 2 \leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Zusammenfassend gilt also

$$2\sqrt{N} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2$$

sowie

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{N} = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{N} + 1 \leq -1$$

womit die Aussage bewiesen ist.

8. [4 *Punkte*] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit Ableitung $f' \geq c$ für eine Konstante $c > 0$.

a) [2 *Punkte*] Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

Da $f' \geq c > 0$ ist, ist f nach einem Resultat aus der Vorlesung strikt monoton wachsend. Insbesondere ist f injektiv. Wir behaupten nun, dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und analoges für $x \to -\infty$. Nach dem Mittelwertsatz gilt für $x_1 < x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq c(x_2 - x_1)$$

wobei $\xi \in (x_1, x_2)$. Für $x_2 \to \infty$ und festes x_1 (respektive für $x_1 \to -\infty$ und festes x_2) folgt damit die behauptete Aussage.
Sei nun $y \in \mathbb{R}$. Nach obiger Behauptung gibt es $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) < y < f(x_2)$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $x \in (x_1, x_2)$ mit $f(x) = y$. Die Funktion f ist somit surjektiv.

b) [2 *Punkte*] Zeigen Sie, dass f ein C^1-Diffeomorphismus ist.

Siehe nächstes Blatt!

Nach dem Umkehrsatz ist f^{-1} differenzierbar (da $f' \neq 0$ überall) und es gilt für $y \in \mathbb{R}$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Da die Funktion f^{-1} differenzierbar ist, ist sie auch stetig. Alternativ lässt sich auch der Umkehrsatz anwenden, da f, wie in a) bewiesen, strikt monoton wachsend ist. Nach obiger Formel lässt sich $(f^{-1})'$ als Verknüpfung stetiger Funktionen darstellen, also ist $(f^{-1})'$ auch stetig.

9. [5 *Punkte*] Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: Falls für alle $x \in U$ das Differential $\mathrm{D}_x f$ invertierbar ist, dann nimmt die Funktion

$$x \in U \mapsto \|f(x)\|_2^2 \in \mathbb{R}$$

kein Maximum an.

Sei $g : x \in U \mapsto \|f(x)\|_2^2 \in \mathbb{R}$.
VARIANTE 1: Nach dem Satz der inversen Funktion ist f ein C^1-Diffeomorphismus. Insbesondere ist $f(U)$ offen. Wir nehmen nun per Widerspruch an, dass die Funktion g ein Maximum bei $x_0 \in U$ annimmt. Sei $y_0 = f(x_0)$. Nach obigem gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(y_0) \subset f(U)$. Insbesondere ist

$$y = y_0 + \tfrac{r}{2\|y_0\|} y_0 \in f(U),$$

da $\|y - y_0\| \leq \frac{r}{2\|y_0\|}\|y_0\| < r$. Sei $x \in U$ mit $f(x) = y$. Es gilt nun aber

$$\|f(x)\| = \left(1 + \tfrac{r}{2\|y_0\|}\right)\|y_0\| > \|y_0\| = \|f(x_0)\|,$$

was der Wahl von x_0 widerspricht. Dies beweist die Aussage.
VARIANTE 2: Wir berechnen zuerst die Richtungsableitungen von g. Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $x \in U$

$$\begin{aligned}\partial_v g(x) &= \partial_v(f_1^2)(x) + \ldots + \partial_v(f_n^2)(x)\\ &= 2\partial_v f_1(x) f_1(x) + \ldots + 2\partial_v f_n(x) f_n(x)\\ &= 2\langle \partial_v f(x), f(x)\rangle = 2\langle \mathrm{D}_x f(v), f(x)\rangle,\end{aligned}$$

wobei aus der Vorlesung bekannt ist, dass $\partial_v f(x) = \mathrm{D}_x f(v)$.
Wir nehmen nun per Widerspruch an, dass die Funktion g ein Maximum bei $x_0 \in U$ annimmt. Dann gilt $\partial_v g(x_0) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Es gilt jedoch, dass $\mathrm{D}_{x_0} f$ invertierbar ist, womit ein v mit $\mathrm{D}_{x_0} f(v) = f(x)$ existiert. Nach obigem ist also $\partial_v g(x) = 2\langle f(x), f(x)\rangle = 0$. Also ist f konstant gleich Null. Dies widerspricht jedoch der Invertierbarkeit von $\mathrm{D}_{x_0} f$.

Bitte wenden!

3. Teil: Theorie aus der Vorlesung

10. a) [1 *Punkt*] Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und seien $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass $f_1 + f_2 : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Sei $x_0 \in D$ und sei $\epsilon > 0$. Wähle $\delta_1, \delta_2 > 0$ wie in der Definition der Stetigkeit für f_1 resp. f_2. Sei $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Dann ist für $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$|(f_1 + f_2)(x) - (f_1 + f_2)(x_0)| \leq |f_1(x) - f_1(x_0)| + |f_2(x) - f_2(x_0)| < 2\epsilon,$$

also ist f stetig bei x_0. Die Aussage folgt, da x_0 beliebig war.

b) [1 *Punkt*] Finden Sie zwei reelle Folgen $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ mit

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \neq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Seien für $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}, \quad b_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ -1 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}.$$

Dann ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = 1$. Weiter ist $a_n + b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$, womit die Folgen $(a_n)_n, (b_n)_n$ die gewünschte Eigenschaft haben.

c) [1 *Punkt*] Definieren Sie den Begriff der Konservativität für stetige Vektorfelder auf Gebieten im $\mathbb{R}^n$.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann heisst f konservativ, falls Wegintegrale des Vektorfelds f nur von Anfangs- und Endpunkt abhängen. Genauer formuliert, falls für alle stückweise stetig differenzierbaren Wege $\gamma : [a, b] \to U$ und $\eta : [a', b'] \to U$ mit $\gamma(a) = \eta(a')$ und $\gamma(b) = \eta(b')$ gilt

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{ds} = \int_\eta f \cdot \mathrm{ds}.$$

d) [1 *Punkt*] Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Definieren Sie den Tangentialraum von M bei p.

Der Tangentialraum von M bei p ist durch

$$\mathrm{T}_p M = \{(p, \gamma'(0)) \mid \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M \text{ differenzierbar mit } \gamma(0) = p\}$$

definiert.

e) [1 *Punkt*] Erklären Sie kurz in **1-2 Sätzen**, wie der Satz von Green (Rotationssatz in der Ebene) aus dem Divergenzsatz folgt. Betrachten Sie dazu ein stetig differenzierbares Vektorfeld f auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$.

Siehe nächstes Blatt!

Der Divergenzsatz lässt sich auf das Vektorfeld $g = R^{-1}f$ für die Rotationsmatrix R zum 90 Grad Winkel anwenden, um den Satz von Green zu erhalten. In der Tat ist mit dieser Wahl von g sowohl $\mathrm{div}(g) = \mathrm{rot}(f)$ als auch $\int_{\partial B} g \cdot \mathrm{dn} = \int_{\partial B} f \cdot \mathrm{ds}$.

11. $[4$ *Punkte*$]$ Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a < b$ und sei $(f_n)_n$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$. Beweisen Sie: Falls die Funktionenfolge gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, ist f Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein N mit $f - \epsilon \leq f_n \leq f + \epsilon$ für alle $n \geq N$. Da f_n nach Annahme Riemann-integrierbar ist, gibt es Treppenfunktionen u, o auf $[a, b]$ mit $u \leq f_n \leq o$ und $\int_a^b (u - o)\mathrm{d}x < \epsilon$. Daraus folgt, dass

$$\tilde{u} = u - \epsilon \leq f_n - \epsilon \leq f \leq f_n + \epsilon \leq o + \epsilon = \tilde{o}$$

ist und

$$\int_a^b (\tilde{o} - \tilde{u})\mathrm{d}x = \int_a^b (o - u)\mathrm{d}x + 2\epsilon(b - a) < \epsilon(2b - 2a + 1)$$

ist. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Riemann-Integrierbarkeit von f.
Für die zweite Aussage sei wiederum $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $f - \epsilon \leq f_n \leq f + \epsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Aus der Monotonie des Riemann-Integrals folgt nun

$$\begin{aligned}\int_a^b f\mathrm{d}x - \epsilon(b - a) &= \int_a^b (f - \epsilon)\mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^b f_n\mathrm{d}x \leq \int_a^b (f + \epsilon)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f\mathrm{d}x + \epsilon(b - a),\end{aligned}$$

was zu

$$\left| \int_a^b f\mathrm{d}x - \int_a^b f_n\mathrm{d}x \right| \leq \epsilon(b - a)$$

äquivalent ist. Dies beweist die Formel.

Bitte wenden!

12. $[5$ *Punkte*$]$ Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion, die bei $x_0 \in (a,b)$ stetig ist. Zeigen Sie, dass

$$F : x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

bei x_0 differenzierbar ist und $F'(x_0) = f(x_0)$ erfüllt.

Sei $x_0 \in [a,b]$. Wir möchten zeigen, dass F bei x_0 differenzierbar ist und $F'(x_0) = f(x_0)$ gilt. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]$. Wir verwenden dies nun in Kombination mit der Dreiecks-Ungleichung für das Riemann-Integral und der Intervalladditivität des Riemann-Integrals, um die Aussage zu zeigen. Für $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap [a,b] \setminus \{x_0\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right) - f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t - f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\mathrm{d}t\right| \\
&\le \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\mathrm{d}t \le \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \epsilon\mathrm{d}t \ = \ \epsilon.
\end{aligned}$$

Analog gilt für $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap [a,b] \setminus \{x_0\}$, dass

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{F(x_0) - F(x)}{x_0 - x} - f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{x_0 - x}\int_x^{x_0} (f(t) - f(x_0))\mathrm{d}t\right| \\
&\le \frac{1}{x_0 - x}\int_x^{x_0} |f(t) - f(x_0)|\mathrm{d}t \le \epsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, beweist dies $\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$ und damit den Satz.

13. $[6$ *Punkte*$]$ Im Folgenden soll ein wichtiges Lemma für den Beweis der mehrdimensionalen Substitutionsregel bewiesen werden. Sei $\ell > 0$ und sei $Q_0 = [-\ell, \ell]^n \subset \mathbb{R}^n$ ein Würfel um Null. Sei $X \supset Q_0$ eine offene Obermenge und sei

$$\Phi : X \to \Phi(X) \subset \mathbb{R}^n$$

Siehe nächstes Blatt!

ein Diffeomorphismus mit $\Phi(0) = 0$ und $\mathrm{D}_0\Phi = I_n$. Sei $\sigma > 0$ so gewählt, dass $\|(\mathrm{D}_x\Phi - I_n)v\|_2 \leq \sigma\|v\|_2$ für alle $x \in Q_0$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Angenommen $s = \sigma\sqrt{n} < 1$. Das Ziel ist zu zeigen, dass

$$(1-s)Q_0 \subset \Phi(Q_0).$$

Dazu sei zu $y \in (1-s)Q_0$ die Abbildung $F_y : x \in Q_0 \mapsto y - (\Phi(x) - x)$ gegeben.

a) [1 *Punkt*] Begründen Sie, wieso ein $x \in Q_0$ mit $F_y(x) = x$ gesucht ist.

Gibt es ein $x \in Q_0$ mit $F_y(x) = x$, so ist nach Definition von F_y

$$x = y - (\Phi(x) - x) = y - \Phi(x) + x$$

oder in anderen Worten $y = \Phi(x)$, womit y im Bild von Φ liegt wie gewünscht.

b) [2 *Punkte*] Beweisen Sie die Abschätzung

$$\|(\Phi(x_2) - x_2) - (\Phi(x_1) - x_1)\|_2 \leq \sigma\|x_2 - x_1\|_2.$$

für alle $x_1, x_2 \in Q_0$.

Nach dem Fundamentalsatz und der Kettenregel gilt für alle $x_1, x_2 \in Q_0$

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \int_0^1 (\mathrm{D}_{x_1+t(x_2-x_1)}\Phi)(x_2 - x_1)\mathrm{d}t$$

und somit nach der Dreiecksungleichung für Integrale

$$\begin{aligned}
&\|(\Phi(x_2) - x_2) - (\Phi(x_1) - x_1)\|_2 \\
&\qquad = \int_0^1 \left\|\left(\mathrm{D}_{x_1+t(x_2-x_1)}\Phi - I_n\right)(x_2 - x_1)\right\|_2 \mathrm{d}t \\
&\qquad \leq \sigma\|x_2 - x_1\|_2.
\end{aligned}$$

c) [1 *Punkt*] Verwenden Sie b) um zu zeigen, dass F_y die Ungleichung

$$\|F_y(x)\|_\infty \leq \ell$$

für alle $x \in Q_0$ erfüllt und insbesondere Q_0 auf Q_0 abbildet.

Nach Teil b) ist für $x \in Q_0$

$$\|\Phi(x) - x\|_\infty \leq \|\Phi(x) - x\|_2 \leq \sigma\|x\|_2 \leq \sigma\sqrt{n}\|x\|_\infty \leq s\ell$$

und somit

$$\begin{aligned}
\|F_y(x)\|_\infty &\leq \|F_y(x) - y\|_\infty + \|y\|_\infty \\
&= \|\Phi(x) - x\|_\infty + \|y\|_\infty \\
&\leq s\ell + (1-s)\ell = \ell.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

d) [2 *Punkte*] Schliessen Sie auf die gewünschte Aussage.

Für $x_1, x_2 \in Q_0$ gilt nach Teil b)

$$\begin{aligned} \|F_y(x_1) - F_y(x_2)\|_2 &= \|(\Phi(x_1) - x_1) - (\Phi(x_2) - x_2)\|_2 \\ &\leq \sigma \|x_1 - x_2\|_2. \end{aligned}$$

Da $\sigma \leq s < 1$ ist, ist die Abbildung F_y eine Lipschitz-Kontraktion (wohldefiniert nach c)) und besitzt also einen Fixpunkt nach dem Banachschen Fixpunktsatz. Nach Teil a) ist dies, was wir zeigen wollten.

Viel Erfolg!