ETHZ, D-MATH

Probeprüfung

Numerische Methoden D-PHYS, FS 2015

Dr. V. Gradinaru

14.04.2015

Prüfungsdauer: 60 Minuten

Maximal erreichbare Punktzahl: 24

1 Aufgabe (12 Punkte): Numerische Quadratur

Es soll folgendes Integral

$$I = \int_0^2 x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \approx 0.925617446849383$$

numerisch berechnet werden.

(i) Vervollständigen Sie die `Python` Funktion `simpson(func,a,b,N)` in der Vorlage `quad.py` welche das Integral einer skalaren Funktion `func` auf dem Intervall $[a, b]$ mit der zusammengesetzten Simpson-Regel auf N äquidistanten Teilintervallen approximiert.

(ii) Werten Sie das Integral I mit Ihrer Implementierung aus (i) für $N = 2, \dots, 500$ aus und plotten Sie den Fehler gegen N.

(iii) Das Integral I soll nun mittels Monte-Carlo Quadratur numerisch ausgewertet werden. Implementieren Sie hierzu die Funktion `mc(func,a,b,N)` in der Vorlage `quad.py` welche das Integral einer skalaren Funktion `func` auf dem Intervall $[a, b]$ mit `N` uniform verteilten Samples berechnet.

(iv) Werten Sie das Integral I mit Ihrer Implementierung aus (iii) für $N = 2, \dots, 500$ aus und plotten Sie den Fehler gegen N.

(v) Was ist die genaue Bedeutung der durch die Monte-Carlo Quadratur mit N Samples berechneten Approximation des Integrals I?

(vi) Es soll nun die Methode der Varianzkontrolle für die Bestimmung des Integrals I benutzt werden. Werten Sie das Integral I mit Ihrer Implementierung aus (iii) für $N = 2, \dots, 500$ aus und plotten Sie den Fehler gegen N. Benutzen Sie hierzu die Darstellung

$$f(x) = f(x) - \varphi(x) + \varphi(x)$$

mit

$$\varphi(x) = \frac{1}{e-1}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \quad \text{und} \quad \int_0^2 \varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{e-1}\,.$$

Bitte wenden!

2 Aufgabe (12 Punkte): Die Airy-Gleichung

Es soll die so genannte Airy Gleichung

$$\ddot{u}(t) - t\,u(t) = 0$$

numerisch gelöst werden wobei folgende Anfangswerte zum Zeitpunkt $T_{start} = 0$ gegeben sind

$$u(0) = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}\Gamma(\frac{2}{3})} \approx 0.3550280539$$
$$\dot{u}(0) = -\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}\Gamma(\frac{1}{3})} \approx -0.2588194038$$

und rückwärts in der Zeit integriert wird bis zu $T_{end} = -40$. Dieses Anfangswertproblem definiert die Airy-Funktion $\mathrm{Ai}(t)$ welche in der Physik eine grosse Bedeutung hat.

(i) Schreiben Sie die Gleichung um in ein System erster Ordnung für $y(t)$ und leiten Sie daraus die rechte Seite her. Implementieren Sie die rechte Seite in der Funktion `rhs` welche t und $y(t)$ als Argumente hat.

(ii) Implementieren Sie das explizite Eulerverfahren in der Funktion `integrate_EE`. Die Argumente dieser Funktion sind der Anfangswert $y(0)$, Anfangszeit T_{start}, Endzeit T_{end} und die Anzahl Schritte $N = 10^4$. Lösen Sie das Anfangswertproblem und plotten Sie die Lösung.

(iii) Implementieren Sie das implizite Eulerverfahren in der Funktion `integrate_IE`. Die Argumente dieser Funktion sind der Anfangswert $y(0)$, Anfangszeit T_{start}, Endzeit T_{end} und die Anzahl Schritte $N = 10^4$. Lösen Sie das Anfangswertproblem und plotten Sie die Lösung.

Hinweis: Benutzen Sie die Funktion `fsolve` aus `scipy.optimize`.

(iv) Implementieren Sie die Runge-Kutta 3/8 Regel in der Funktion `runge_kutta`. Diese Funktion soll t und $y(t)$ als Eingabe haben und $t + dt$ sowie $y(t + dt)$ zurück liefern und somit einen einzelnen Runge-Kutta Schritt machen.

Das Butcher Schema der Runge-Kutta 3/8 Regel lautet

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8}
\end{array}$$

(v) Lösen Sie das gegebene Anfangswertproblem mit einer Runge-Kutta 3/8 Zeitintegration. Implementieren Sie dafür die Funktion `integrate_RK`, die $N = 10^3$ Zeitschritte im Simulationsintervall $[T_{start}, T_{end}]$ macht. Plotten Sie die Lösung.

Siehe nächstes Blatt!