Dr. Vasile Gradinaru
Kjetil Olsen Lye

Serie 2

Abgabedatum: Di./Mi. 13.3/14.3 in den Übungsgruppen oder im HG J68
Koordinatoren: Kjetil Olsen Lye, HG G 53.1, `kjetil.lye@sam.math.ethz.ch`
Webpage: `http://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-1662-10L/`

1. *Konvergenzraten und Adaptive Quadratur*

a) Verwenden Sie folgende Quadraturregeln

- zusammengesetzte Trapezregel
- zusammengesetzte Simpsonregel

um das Integral

$$I = \int_0^1 f_i(x) \mathrm{d}x$$

von $f_i(x)$ auf N Teilintervallen oder mit n Funktionsauswertungen zu berechnen. (Die genauen Werte von N und n stehen im Template.) Die beiden Funktionen sind gebeben durch

$$f_1(x) := \frac{1}{1+5x^2} \qquad f_2(x) := \sqrt{x}\,.$$

Berechnen Sie den Fehler und plotten Sie die Konvergenzraten. Welche Methode verwendet man sinnvollerweise?

Hinweis: Verwenden Sie das Template `quadrature.py`

Bitte wenden!

2. *Homogen geladenes Quadrat in kartesischen Koordinaten*

Betrachten Sie ein quadratisches Gebiet in der x-y-Ebene welches eine konstante elektrische Ladungsdichte ρ_0 aufweist

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \rho_0, & (x,y) \in [-1,1]^2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das elektrostatische Potential φ an einem Punkt (x_p, y_p) ausserhalb des geladenen Quadrats ist dann durch Integration über die geladene Region gegeben

$$\varphi(x_p, y_p) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \,.$$

Der Einfachheit halber setzen Sie $\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} = 1$.

Implementieren Sie die Trapez- und die Simpson-Regel in zwei Dimensionen und berechnen Sie dann $\varphi(x_p, y_p)$ für $x_p = y_p = 2, 10, 20$. Schauen Sie sich den Fehler genau an. Was ist erstaunlich daran? Wie erklären sie sich dieses Verhalten?

Hinweis: Verwenden Sie das Template `potential.py`

Siehe nächstes Blatt!

3. *Neues in* `Python`

In Python können Sie Funktionen als Funktionsargumente übergeben.

```
import numpy as np

def apply(f, x):
    return f(x)

def square(x):
    return x*x

x = np.random.random((3, 4))

apply(print, x)
print(apply(np.sin, x))
print(apply(lambda x: np.sum(x, axis=-1), x))
print(apply(square, x))
```

Einen Graph erstellen Sie wie folgt

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x = np.linspace(1e-5, 1.2, 10000)
fx = np.sin(2.0*np.pi/x)
plt.plot(x, fx, label="sin")
plt.legend()
plt.xlabel("x-Label")
plt.ylabel("y-Label")

plt.savefig("sin.png")
plt.savefig("sin.eps")
plt.show()
```

Bitte wenden!

4. *Gauss-Legendre Quadratur und Golub-Welsch Algorithmus* **Aufgabe a) und b): Zusatzaufgaben (Theorie wird in den kommenden Wochen genauer erläutert)**

a) Leiten Sie die Drei-Term-Rekursion her, welche die Legendre Polynome $P_n(x)$ beschreibt. Das Skalarprodukt ist in diesem Fall gegeben als:

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x$$

und es gilt $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$.

b) Begründen Sie die Wahl der Einträge in der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}$ im Algorithmus von Golub-Welsch. (Siehe Code 7.3.3 im Skript.)

c) Verwenden Sie folgende Quadraturregeln

- zusammengesetzte Trapezregel
- zusammengesetzte Simpsonregel
- Gauss-Legendre Quadratur
- zusammengesetzte Gauss-Legendre Quadratur

um das Integral

$$I = \int_{0}^{1} f_i(x)\mathrm{d}x$$

von $f_i(x)$ auf N Teilintervallen oder mit n Funktionsauswertungen zu berechnen. (Die genauen Werte von N und n stehen im Template.) Die beiden Funktionen sind gebeben durch

$$f_1(x) := \frac{1}{1+5x^2} \qquad f_2(x) := \sqrt{x}\,.$$

Berechnen Sie den Fehler und plotten Sie die Konvergenzraten. Welche Methode verwendet man sinnvollerweise?

Hinweis: Verwenden Sie das Template `quadrature_gl_gw.py`.