Dr. Vasile Gradinaru
Kjetil Olsen Lye

Serie 6

Abgabedatum: Di. 08.05 / Mi. 09.05, in den Übungsgruppen, oder im HG J 68.
Koordinatoren: Kjetil Olsen Lye, HG G 56.1 `kjetil.lye@sam.math.ethz.ch`
Webpage: http://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-1662-10L

1. *Runge-Kutta Methoden*

Gegeben ist das klassische Runge-Kutta-Verfahren mit dem Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

a) Implementiere dieses Runge-Kutta-Verfahren für allgemeine Systeme erster Ordnung.

Hinweis: Verwende das Template `2_klassRK_Template.py`.

b) Verwende das Programm aus Aufgabenteil a), um das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 101y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \tag{1}$$

mit exakter Lösung:

$$y(t) = e^{-t} \cdot \cos(10t) \tag{2}$$

approximativ innerhalb des Intervalls $t \in [0, 3]$ zu lösen. Überführe dazu zunächst die Differentialgleichung in ein System erster Ordnung. Wähle eine geeignete Schrittweite h und plotte sowohl die Näherungs- als auch die exakte Lösung.

c) Ermitteln Sie empirisch, d.h. mit numerischen Experimente und geeignete Konvergenzplots, die Konvergenzordnung dieses Verfahrens für das gegebene Problem.

d) Finden Sie die Stabilitätsfunktion für diese Runge-Kutta-Methode.

e) Implementieren Sie die Stabilitätsfunktion $S : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Das Template verwendet dieses `S(z)` um den Stabilitätsbereich der Runge-Kutta-Methode zu plotten. Bestimmen Sie durch Ablesen aus diesem Bild eine maximale Zeitschrittweite h, die eine stabile Lösung für letztgennante Differentialgleichung garantiert. Notieren Sie die Herleitung und den Wert auf Papier.

Bitte wenden!

2. Es soll die so genannte Airy Gleichung

$$\ddot{u}(t) - t\,u(t) = 0$$

numerisch gelöst werden wobei folgende Anfangswerte zum Zeitpunkt $T_{start} = 0$ gegeben sind

$$u(0) = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}\Gamma(\frac{2}{3})} \approx 0.3550280539$$
$$\dot{u}(0) = -\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}\Gamma(\frac{1}{3})} \approx -0.2588194038$$

und rückwärts in der Zeit integriert wird bis zu $T_{end} = -40$. Dieses Anfangswertproblem definiert die Airy-Funktion $\mathrm{Ai}(t)$ welche in der Physik eine grosse Bedeutung hat.

1. Schreiben Sie die Gleichung um in ein System erster Ordnung für $y(t)$ und leiten Sie daraus die rechte Seite her. Implementieren Sie die rechte Seite in der Funktion `rhs` welche t und $y(t)$ als Argumente hat.

   Hinweis: Verwenden Sie das Template `airy.py`

2. Implementieren Sie das explizite und das implizite Eulerverfahren, die explizite und die implizite Mittelpunktsregel. Die Argumente dieser Funktionen sind: der Anfangswert $y(0)$, Anfangszeit T_{start}, Endzeit T_{end} und die Anzahl Schritte N. Lösen Sie das Anfangswertproblem und plotten Sie die Lösung.

   Hinweis: Benutzen Sie die Funktion `fsolve` aus `scipy.optimize`.

3. Implementieren Sie die 4 entsprechenden Runge-Kutta Methoden mit allgemeinem Butcher Schema in der Funktion `RK`. Bekommen Sie dieselbe Ergebnisse wie beim Punkt 2?

4. Lösen Sie das gegebene Anfangswertproblem mit einer Runge-Kutta 3/8 Zeitintegration. Implementieren Sie dafür die Funktion `RK_38` und plotten Sie die Lösung.

   Hinweis: Das Butcher Schema der Runge-Kutta 3/8 Regel lautet

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/3 & 1/3 & & & \\ 2/3 & -1/3 & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$

   Das 3/8 Butcher Schema in dem Programm ist repräsentiert wie eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

3. *Stabile Integration*

Zur Problematik der stabilen Integration betrachten wir das lineare homogene Differentialgleichungssytem:

$$u'(x) = 998u(x) + 1998v(x)$$
$$v'(x) = -999u(x) - 1999v(x)$$

mit Anfangswerten $u(0) = 1$ und $v(0) = 0$.

a) Bestimmen Sie die analytische Lösung der obigen Anfangswertaufgabe.

b) Das obige System soll nun mittels expliziter und impliziter Euler Methode im Intervall $[0, 2]$ gelöst werden. Worauf muss bei der jeweiligen Methode bei der Schrittweitenwahl h geachtet werden? Falls die Schrittweite Beschränkt ist, geben Sie die maximal zulässige an. Implementieren Sie explizite und implizite Euler Methode und überprüfen Sie die Richtigkeit der Aussagen, indem Sie das obige System numerisch lösen.

Bitte wenden!

4. *Stabilitätsfunktion*

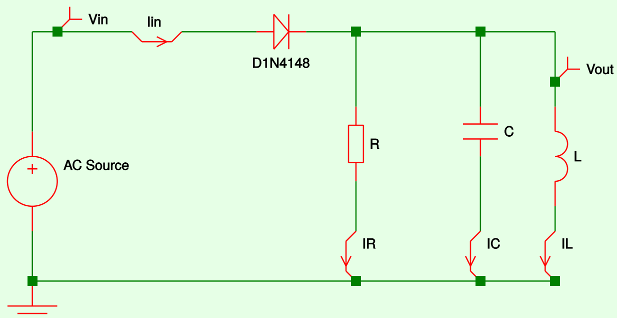
Bestimmen Sie Stabilitätsfunktion $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der impliziten Mittelpunktsregel. Zeigen Sie, dass $|S(z)| \leq 1$ ist, genau dann wenn $\mathrm{Re}(z) \leq 0$ gilt.

Hinweis: Es gilt $|z|^2 = z\bar{z}$, wobei $\bar{z}$ das Konjugiertkomplexe $\mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)$ ist.

5. Kernaufgabe: Schaltkreissimulation

Modellierung der Physik

Wir betrachten im Folgenden eine einfache elektronische Schaltung.



Der Plan zeigt eine Schaltung bestehend aus einer Standarddiode (`D 1N4148`), sowie Widerstand R, Kapazität (Kondensator) C und Induktivität (Spule) L. Eingezeichnet sind auch die Messpunkte V_{in} und V_{out} für Spannungen sowie I_{in}, I_R, I_C und I_L für Ströme. Die Schaltung ist an eine Wechselspannungsquelle (AC) mit $V_{in}(t)$ angeschlossen. Gesucht ist die Ausgangsspannung $V_{out}(t)$ relativ zur Erdung.

Mathematisches Modell

Aus der Problemstellung ergeben sich folgende Gleichungen:

$$V_{in} = V_D + V_{out} \tag{3}$$

$$I_D - I_R - I_C - I_L = 0 \tag{4}$$

$$V_{out} = V_C = V_R = V_L \tag{5}$$

$$V_R = RI_R \tag{6}$$

$$I_C = C\dot{V}_C \tag{7}$$

$$V_L = L\dot{I}_L \tag{8}$$

$$I_D = I_S\left(e^{\frac{V_D}{nV_T}} - 1\right) \tag{9}$$

wobei der Verlauf der Eingangsspannung $V_{in} = V_0 \sin(2\pi f t)$ mit $V_0 = 5\,\mathrm{V}$ und $f = 50\,\mathrm{Hz}$, die Parameter $n = 1$, $I_S = 1\,\mathrm{nA}$, $V_T = 25\,\mathrm{mV}$ der Diode sowie der Widerstand $R = 100\,\mathrm{k\Omega}$, die Induktivität $L = 50\,\mathrm{mH}$ und die Kapazität $C = 10\,\mathrm{nF}$ bekannt sind.

Bitte wenden!

Aufgabenstellung

a) Leiten Sie eine (nicht-lineare) Differentialgleichung zweiter Ordnung für den Strom $I_L(t)$ der durch die Induktivität (Spule) fliesst her.

Hinweis: Starten Sie mit Gleichung (4) und versuchen Sie, alle Ströme durch I_L auszudrücken.

b) Lösen Sie diese Gleichung mit Hilfe der impliziten Mittelpunktsregel mit 12001 Zeitschritten und Endzeit $T = 30 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$. Als Anfangswerte sollen $I_L(0) = 0$ und $\dot{I}_L(0) = 0$ verwendet werden. Messen Sie die für die Integration benötigte Rechenzeit[a].

Hinweis: Verwenden Sie das Template `circuit.py`

c) Implementieren Sie ein allgemeines *implizites* Runge-Kutta Verfahren mit s Stufen. Der Code soll möglichst generell geschrieben sein und mit beliebigen Butcher Schemata als Input funktionieren.

Hinweis: Die $\underline{k_i}$ sollen in einen grossen Vektor $\underline{k} := [\underline{k_1}|\dots|\underline{k_s}]^{\mathrm{T}}$ verpackt werden. Dies vereinfacht das Lösen der nicht-linearen Gleichungen.

Hinweis: Verwenden Sie das Template `rk.py`

d) Benutzen Sie folgende Gauss-Kollokations-Methode der Ordnung 6 um die gegebene Gleichung zu lösen. Das Butcher Schema sei:

$$\begin{array}{c|ccc}
\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{5}{36} & \frac{2}{9} - -\frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30} \\
\frac{1}{2} & \frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24} & \frac{2}{9} & \frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24} \\
\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{30} & \frac{2}{9} + \frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{5}{36} \\
\hline
 & \frac{5}{18} & \frac{4}{9} & \frac{5}{18}
\end{array}$$

und hat 3 Stufen. Verwenden Sie wiederum 12001 Zeitschritte und die Endzeit $T = 30 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$. Als Anfangswerte sollen $I_L(0) = 0$ und $\dot{I}_L(0) = 0$ verwendet werden. Messen Sie die für die Integration benötigte Rechenzeit.

e) Berechnen und plotten Sie jeweils die Spannungen $V_{in}(t)$ und $V_{out}(t)$ gegen die Zeit. Plotten Sie auch den Bereich von 16 ms bis 21 ms separat.

f) Berechnen und plotten Sie jeweils die Ströme $I_D = I_{in}$, I_R, I_C und I_L die durch die verschiedenen Bauteile fliessen. Plotten Sie I_C und I_L im Bereich von 16 ms bis 21 ms separat.

g) Ist die numerische Lösung der Differentialgleichung korrekt?

h) Lösen Sie die Aufgabe mit dem `ode45` Verfahren und vergleichen Sie die Resultate. Die anfängliche Schrittweite soll `2e-5` sein. Verwenden Sie eine relative und eine absolute Toleranz von je `1e-8`. Messen Sie die für die Integration benötigte Rechenzeit.

i) Ist die Differentialgleichung steif? Begründen Sie ob die gewählten Lösungsverfahren geeignet sind? Welche Lösungsverfahren sollte man anderenfalls verwenden?

---

[a] Das `time` Modul bietet entsprechende Funktionen.
https://docs.python.org/3/library/time.html#time.perf_counter