D-MATH Numerische Methoden FS 2018
Dr. Vasile Gradinaru
Kjetil Olsen Lye

Serie 8

Abgabedatum: Di. 22.05 / Mi. 23.05, in den Übungsgruppen, oder im HG J 68.
Koordinatoren: Kjetil Olsen Lye, HG G 56.1 `kjetil.lye@sam.math.ethz.ch`
Webpage: http://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-1662-10L

1. *Gram-Schmidt-Verfahren und Householder Transformation*

In der Vorlesung haben wir die Householder Transformation verwendet um die **QR**-*Zerlegung* einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ zu bestimmen. Ein weiteres, sehr intuitives Verfahren, das sukzessive die Spalten $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ mit $\underline{a}_i \in \mathbb{R}^m$, von $\mathbf{A}$ orthogonalisiert, ist das Gram-Schmidt-Verfahren. Das Gram-Schmidt-Verfahren ist ein Standardwerkzeug in Beweisen der Linearen Algebra. Die folgenden Algorithmen (in Pseudo-Code) liefern eine **QR**-Zerlegung nach dem *Gram-Schmidt-Verfahren* und dem *modifizierten Gram-Schmidt-Verfahren*:

Gram-Schmidt:

for $j = 1, \ldots, n$ **do**
  $\mathbf{v_j} = \mathbf{A}_{:j}$
  for $i = 1, \ldots, j-1$ **do**
    $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{q_i}^{\mathrm{T}}\mathbf{a_j}$
    $\mathbf{v_j} = \mathbf{v_j} - \mathbf{R}_{ij}\mathbf{q_i}$
  end for
  $\mathbf{R}_{jj} = \|\mathbf{v_j}\|_2$
  $\mathbf{Q}_{:j} = \frac{\mathbf{v_j}}{\mathbf{R}_{jj}}$
end for

Modifiziertes Gram-Schmidt:

for $i = 1, \ldots, n$ **do**
  $\mathbf{V}_{:i} = \mathbf{A}_{:i}$
end for
for $i = 1, \ldots, n$ **do**
  $\mathbf{R}_{ii} = \|\mathbf{v_i}\|_2$
  $\mathbf{q_i} = \frac{\mathbf{v_i}}{\mathbf{R}_{ii}}$
  for $j = i+1, \ldots, n$ **do**
    $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{q_i}^{\mathrm{T}}\mathbf{v_j}$
    $\mathbf{v_j} = \mathbf{v_j} - \mathbf{R}_{ij}\mathbf{q_i}$
  end for
end for

a) Implementieren Sie die beiden Gram-Schmidt-Verfahren in `1_ortho.py` und verwenden Sie beide Verfahren, um die **QR**-Zerlegung der Matrix $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{50\times 50}$ mit den Einträgen:

$$\mathbf{Z}_{ij} = 1 + \min(i, j), \quad 0 \le i, j < 50$$

zu bestimmen.

b) Vergleichen Sie die Güte der beiden Gram-Schmidt-Verfahren in Bezug auf die Orthogonalität der Spalten von $\mathbf{Q}$.

c) Warum sind die Gram-Schmidt-Verfahren im Gegensatz zur Householder-Transformation (siehe `1_ortho.py`) ungeeignete numerische Methoden zur Berechnung von **QR**-Zerlegungen?

Bitte wenden!

2. *Radioaktiver Zerfall*

In einem Gefäss befinden sich n verschiedene Elemente $Z_1, \ldots, Z_n$. Zum Zeitpunkt t sei $M_k(t)$ die Menge von Element Z_k. Die Elemente seien radioaktiv und die Zerfallsprodukte zerfallen selbst nicht weiter. Die Zerfallskonstanten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind gegeben. Zu m ($m \geq n$) Zeiten t_j erfolgt eine Messung der Aktivität $G(t_j)$.

Folgende physikalische Gesetze werden angenommen:

1. Zerfallsgesetz: $M_i(t) = M_i(0) \exp(-\lambda_i t)$, $t \geq 0$
2. Gesamtaktivität: $G(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} G_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i(t)$

Formulieren Sie ein Ausgleichsproblem zur Bestimmung von $M_1(0), \ldots, M_n(0)$.

Wählen Sie verschiedene n, Stoffmengen $M_k(0) \in [100, 500]$ und Zerfallsraten $\lambda_k \in [10^{-2}, 10^{-1}]$. Berechnen Sie die exakte Gesamtaktivität für verschiedene Zeitpunkte t_i. Erstellen Sie künstliche Messdaten, indem Sie $G(t_i)$ mit einem Messfehler versehen, auch hier sollten Sie verschieden starke Messfehler ausprobieren. Lösen Sie das Ausgleichsproblem für die jeweils gewählten Parameter. Was beobachten Sie?

Siehe nächstes Blatt!

3. *Die Normalengleichungen sind schlecht konditioniert*

Wir betrachten die Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 \\ 1-\varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}. \tag{1}$$

In exakter Arithmetik ist die Normalengleichung:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\underline{x} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\underline{b} \tag{2}$$

äquivalent zu

$$\mathbf{B}_\alpha \begin{pmatrix} \underline{r} \\ \underline{x} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\alpha\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{r} \\ \underline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{b} \\ \underline{0} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Schreiben Sie ein `Python`-Skript, das die Kondition von $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1$ und $\mathbf{B}_\alpha$ mit $\alpha = \varepsilon\|\mathbf{A}\|_2/\sqrt{2}$ für $10^{-5} < \varepsilon < 1$ plottet. Das `Python`-Modul `numpy.linalg` hat eine Funktion `cond`.

Bitte wenden!

4. *Polynomfit und die Runge Funktion*

Die Runge Funktion ist definiert als:

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}\,. \tag{4}$$

Wir wollen diese Funktion auf dem Interval $[-5,5]$ mit einem Polynom $P_n(x)$ von Grad n approximieren. Dazu schreiben wir ein lineares Ausgleichsproblem mit m gleichmässig in $[-5,5]$ verteilten Punkten $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^{m}$ wie folgt:

$$\mathbf{A}\underline{c} = \underline{b} \tag{5}$$

wobei $\underline{c}$ die $n+1$ Koeffizienten des Polynoms P_n sind.

a) Finden Sie die Matrix $\mathbf{A}$ und die rechte Seite $\underline{b}$.

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem für Polynome mit Grad $2 \leq n \leq 14$ und jeweils $m = 20$ und $m = 40$.

Siehe nächstes Blatt!

5. *Global Positioning System*

Global Positioning System ist ein globales Navigationssatellitensystem zur Positionsbestimmung und Zeitmessung. GPS basiert auf Satelliten, die mit codierten Radiosignalen ständig ihre aktuelle Position und die genaue Uhrzeit ausstrahlen. Aus den Signallaufzeiten können GPS-Empfänger dann ihre eigene Position und Geschwindigkeit berechnen. Theoretisch reichen dazu die Signale von drei Satelliten aus, welche sich oberhalb ihres Abschaltwinkels befinden müssen, da daraus die genaue Position und Höhe bestimmt werden kann. In der Praxis haben aber GPS-Empfänger keine Uhr, die genau genug ist, um die Laufzeiten korrekt zu messen. Deshalb wird das Signal eines vierten Satelliten benötigt, mit dem dann auch die genaue Zeit im Empfänger bestimmt werden kann. [1]

Das Signal des Satelliten i enthält seine Zeit und Position:

$$[t_{s,i},\ x_{s,i},\ y_{s,i},\ z_{s,i}]$$

Wir können N Satelliten empfangen und speichern die Messwerte zeilenweise in $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N\times 4}$. Die Zeit des Empfängers t_r ist im Vergleich zur Signallaufzeit nur unzureichend bekannt und muss ebenso wie die Position bestimmt werden, d.h. wir suchen:

$$\underline{x} := [t_r,\ x_r,\ y_r,\ z_r].$$

Dazu minimieren wir die Residuen r_i, $i = 1 \dots N$ gegeben durch folgende Gleichung:

$$\boxed{r_i := -c^2(t_r - t_{s,i})^2 + (x_r - x_{s,i})^2 + (y_r - y_{s,i})^2 + (z_r - z_{s,i})^2}$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum darstellt.

a) Implementieren Sie den Residuenvektor $F(\underline{x}, \mathbf{X}) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^{N\times 4} \to \mathbb{R}^N$.

b) Implementieren Sie die Jacobi-Matrix $J(\underline{x}, \mathbf{X}) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^{N\times 4} \to \mathbb{R}^{N\times 4}$.

c) Lösen Sie das nichtlineare Ausgleichsproblem mit dem Gauss-Newton Verfahren.

d) Die Genauigkeit der Positionsbestimmung hängt vom Messfehler in der Signallaufzeit, der Anzahl sichtbarer Satelliten und ihrer Verteilung ab. Die Funktion `random_sampling` im Code Template simuliert den Ausfall von Satelliten, was auftritt wenn Satelliten in einer gewissen Himmelsrichtung von einem Hindernis verdeckt werden.

Kommentieren Sie die Beobachtungen für die mit `random_sampling` erstellten Plots mit verschiedenen Toleranzen in der Zeitmessung $\varepsilon_t = 10^{-10}, 10^{-8}, 10^{-7}, 10^{-6}$.

[1] Aus Wikipedia: http://de.wikipedia.org/wiki/GPS

Bitte wenden!

6. *QR-Zerlegung*

a) Gegeben sei eine orthogonale Matrix A. Geben Sie die Matrizen Q und R einer QR-Zerlegung von A an.

b) Die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ kann entweder durch Drehung oder Spiegelung realisiert werden. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Drehmatrix Q_{21} und eine Spiegelungsmatrix H_1, so dass

$$Q_{21}A = R_1, \qquad H_1 A = R_2,$$

wobei R_1 und R_2 obere Dreiecksmatrizen sind. Geben Sie dann für $i = 1, 2$ eine orthogonale Matrix Q_i und eine Rechtsdreiecksmatrix R_i an, so dass $A = Q_i R_i$.