Serie 1

Abgabetermin: *Mittwoch, 28.02.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Es seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ sei eine Abbildung.

a) Wenn $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Y ist, zeige, dass

$$\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{B}\}$$

eine σ-Algebra auf X ist.

b) Wenn $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist, zeige, dass

$$\{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra auf Y ist.

2. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ heisst *unterhalbstetig* (oder nach unten halb-stetig), falls für alle Punkte $x \in X$ und alle Folgen $(x_k)_{k\geq 1} \subset X$ mit $x_k \to x$ für $k \to +\infty$ gilt

$$f(x) \leq \liminf_{k\to+\infty} f(x_k).$$

Zeige: eine solche Funktion f ist Borel-messbar.

3. Es sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf einem messbaren Raum $(X, \mathcal{A})$. Zeige, dass die Funktion f *genau dann* messbar ist, wenn die Menge $\{x : f(x) \geq r\}$ messbar ist für alle rationalen Zahlen $r \in \mathbb{Q}$.

4. Es bezeichne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ die Borel σ-Algebra der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie.

a) Konstruiere eine Menge $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ die sowohl eine F_σ Menge als auch eine G_δ Menge ist.

b) Konstruiere eine Menge $G \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ die eine G_δ Menge jedoch keine F_σ Menge ist. Benutze dazu Teilaufgabe d).

c) Konstruiere eine Menge $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ die weder eine G_δ noch eine F_σ Menge ist.

d)* Zeige, dass $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ eine F_σ Menge jedoch keine G_δ Menge ist.

Hinweis: Argumentiere indirekt und imitiere die Konstruktion der Cantor-Menge.