Serie 10

Abgabetermin: *Mittwoch, 16.05.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Es sei λ das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}^n$ und es sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ wobei $1 \leq p < +\infty$. Zeige

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p \, d\lambda \to 0 \quad \text{mit } h \to 0.$$

2. Beweise: Gilt in einem reellen normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \text{für alle } x, y \in V,$$

so ist V ein Prähilbertraum, d.h. die Norm wird von einem Skalarprodukt erzeugt.

Hinweis: Definiere $\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ für alle $x, y \in V$.

3. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Massraum. Sei $M(X, \mathcal{A})$ der Vektorraum der messbaren reellwertigen Funktionen auf X und $N(X, \mathcal{A}, \mu)$ der Unterraum der fast überall verschwindenden Funktionen.

Wir betrachten den Quotientenraum $[M] := M(X, \mathcal{A})/N(X, \mathcal{A}, \mu)$. Zeige:

a) Die Funktion $d\colon [M] \times [M] \to [0, +\infty)$ gegeben durch

$$d([f], [g]) := \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \, d\mu$$

ist wohldefiniert und ist eine Metrik auf $[M]$.

b) Es gilt $d([f_n], [f]) \to 0$ mit $n \to +\infty$ genau dann, wenn $f_n \to f$ mit $n \to +\infty$ im Mass.

c) Der Raum $([M], d)$ ist vollständig.

d) Die Multiplikation $[M] \times [M] \to [M]$ gegeben durch $([f], [g]) \mapsto [fg]$ ist wohldefiniert und stetig bezüglich d.

Hinweis: Verwende $f_n g_n - fg = (f_n - f)(g_n - g) + (f_n - f)g + f(g_n - g)$.

Bitte wenden!

4. Es sei λ ein reellwertiges Mass auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. Für $E \in \mathcal{A}$ definiere

$$\mu(E) := \sup\Big\{ \sum_{i=1}^{N} |\lambda(E_i)| : N \geq 1 \text{ und } (E_i)_{i=1,\dots,N} \text{ ist eine Partition von } E \Big\}.$$

Beweise oder widerlege ob $\mu = |\lambda|$.