Lösung - Serie 10

Abgabetermin: *Mittwoch, 16.05.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Es sei λ das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}^n$ und es sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ wobei $1 \leq p < +\infty$. Zeige

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p \, d\lambda \to 0 \quad \text{mit } h \to 0.$$

Lösung:

Es sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Definiere

$$M := \max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$$

und $f_h(x) := |f(x+h) - f(x)|$, beachte

$$Tr(f_h) \subset Tr(f) \cup (Tr(f) - h).$$

Der Träger von f_h ist also insbesondere kompakt. Weil

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |f(x)| + |f(x+h)| \leq 2M \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

folgt $|f_h| \leq g := 2M \cdot \chi_{Tr(f_h)}$. Die Funktion g ist messbar und integrierbar. Deshalb folgt mittels dem Satz über die beschränkte Konvergenz, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)| \, d\lambda \to 0 \quad \text{mit } h \to 0.$$

Wir haben also für alle $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ die Aussage gezeigt. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $C_c(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist, falls $1 \leq p < +\infty$ (siehe Satz 5.12). Es sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $f_n \in C_c(\mathbb{R}^n)$ eine Folge so dass $\|f_n - f\|_p \to 0$ mit $n \to +\infty$. Beachte

$$\|f_h - f\|_p \leq \|f_h - (f_n)_h\|_p + \|(f_n)_h - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p.$$

Da λ translationsinvariant ist, folgt $\|f_h - (f_n)_h\|_p = \|f_n - f\|_p$. Wir wissen $\|(f_n)_h - f_n\|_p \to 0$ mit $h \to 0$ und somit

$$\lim_{h \to 0} \|f_h - f\|_p \leq 2\|f_n - f\|_p.$$

Weil $\|f_n - f\|_p \to 0$ mit $n \to +\infty$ folgt die Aussage.

Bitte wenden!

2. Beweise: Gilt in einem reellen normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \text{für alle } x, y \in V,$$

so ist V ein Prähilbertraum, d.h. die Norm wird von einem Skalarprodukt erzeugt.

Hinweis: Definiere $\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ für alle $x, y \in V$.

Lösung: Siehe Satz 1.3.7 auf Seite 18 in

`http://www.math.uni-leipzig.de/fachschaft/alt/dateien/skripte/fa1-schmuedgen.pdf`

3. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Massraum. Sei $M(X, \mathcal{A})$ der Vektorraum der messbaren reellwertigen Funktionen auf X und $N(X, \mathcal{A}, \mu)$ der Unterraum der fast überall verschwindenden Funktionen.

Wir betrachten den Quotientenraum $[M] := M(X, \mathcal{A})/N(X, \mathcal{A}, \mu)$. Zeige:

a) Die Funktion $d\colon [M] \times [M] \to [0, +\infty)$ gegeben durch

$$d([f],[g]) := \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\mu$$

ist wohldefiniert und ist eine Metrik auf $[M]$.

b) Es gilt $d([f_n],[f]) \to 0$ mit $n \to +\infty$ genau dann, wenn $f_n \to f$ mit $n \to +\infty$ im Mass.

c) Der Raum $([M], d)$ ist vollständig.

d) Die Multiplikation $[M] \times [M] \to [M]$ gegeben durch $([f],[g]) \mapsto [fg]$ ist wohldefiniert und stetig bezüglich d.

Hinweis: Verwende $f_n g_n - fg = (f_n - f)(g_n - g) + (f_n - f)g + f(g_n - g)$.

Lösung:

a) Da Nullmengen bei der Integration vernachlässigbar sind ist die Abbildung wohldefiniert. Es sei nun $d([f],[g]) = 0$, nach Satz 2.15 (1) im Skript folgt

$$\frac{|f-g|}{1+|f-g|} = 0$$

fast überall und deshalb $|f-g| = 0$ fast überall. Falls $|f-g| = 0$ fast überall sieht man leicht, dass $d([f],[g]) = 0$. Wir haben also gezeigt, dass das erste Axiom eines metrischen Raumes gilt. Die Symmetrie ist sofort ersichtlich. Es bleibt noch die Dreiecksungleichung zu zeigen. Wir definieren $\varphi\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ mittels

$$x \mapsto \frac{x}{x+1}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Falls $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ für alle $x, y \in [0, +\infty)$, folgt sofort, dass d die Dreiecksungleichung erfüllt. Durch zweimaliges differenzieren, sieht man, dass die Funktion φ monoton steigend und konkav ist. Es gilt also

$$(1-t)\varphi(x) + t\varphi(y) \leq \varphi((1-t)x + ty)$$

für alle $t \in [0,1]$ und $x, y \in [0, +\infty)$. Falls $y = 0$, dann gilt also $t\varphi(x) \leq \varphi(tx)$. Unter Verwendung von $t = \frac{x}{x+y} \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(t(x+y)) && \geq t\varphi(x+y) \\ \varphi(y) &= \varphi((1-t)(x+y)) && \geq (1-t)\varphi(x+y) \end{aligned}$$

also $\varphi(x) + \varphi(y) \geq \varphi(x+y)$, wie gewünscht.

b) Nehme an, dass $f_n \to f$ im Mass. Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \geq 1$ so dass

$$\mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq \mu(X)\varepsilon, \quad \text{for all } n \geq N.$$

Somit für alle $n \geq N$:

$$d([f_n], [f]) \leq \mu(X)\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \cdot 1 \leq \mu(X)\varepsilon \cdot \frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

wobei wir verwendet haben, dass φ monoton steigend ist und $\varphi(x) \leq 1$ für alle $x \in [0, +\infty)$. Wir haben also gezeigt, dass falls $f_n \to f$ im Mass, dann gilt $d([f_n], [f]) \to 0$ mit $n \to +\infty$.

Im Folgenden zeigen wir die Rückrichtung. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir definieren $A_n := \{|f_n - f| > \varepsilon\}$. Es gilt

$$\mu(A_n)\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq \int_{A_n} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, d\mu + \int_{A_n^c} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, d\mu = d([f_n], [f]),$$

deshalb folgt $\mu(A_n) \to 0$ mit $n \to +\infty$, wie gewünscht.

c) Es sei $([f_n])_{n \geq 1}$ eine Cauchy-Folge. Mit denselben Methoden wie in Teilaufgabe b) lässt sich zeigen, dass für alle $\varepsilon, \delta > 0$ eine ganze Zahl $N \geq 1$ existiert, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt

$$\mu(\{|f_n - f_m| > \varepsilon\}) < \delta.$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Es existiert also eine Teilfolge $(f_{n_i})_{i \geq 1}$, so dass

$$\mu(A_i := \{|f_{n_i} - f_{n_{i+1}}| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{2^i}\}$$

für alle $i \geq 1$. Man sieht leicht, dass

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=i}^{+\infty} A_j\right) = 0.$$

Bitte wenden!

Also gilt für μ-fast alle $x \in X$, dass ein $N \geq 1$ existiert, so dass für alle $i \geq N$ gilt

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_{i+1}}(x)| \leq \varepsilon.$$

Mittels eines Diagonalfolgenarguments gibt es also eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ so dass für μ-fast alle x in X die Folge $(f_{n_k}(x))_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge ist. Wir definieren

$$f(x) := \lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(x).$$

Die Funktion f ist μ-fast überall auf X definiert, wir können f also als Element von $[M]$ auffassen. Nach Konstruktion gilt $f_{n_k} \to f$ mit $k \to +\infty$ für μ-fast alle Punkte $x \in X$. Mittels Aufgabe 1a) der Serie 8, folgt nun, dass $f_{n_k} \to f$ im Mass mit $k \to +\infty$. Nun können wir Teilaufgabe b) verwenden und erhalten $d([f_{n_k}], f) \to 0$ mit $k \to +\infty$. Die Cauchy-Folge $[f_{n_k}]$ hat also eine konvergente Teilfolge und somit ist die gesamte Folge konvergent, was zu zeigen war.

d) Weil die Vereinigung zweier Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, ist die Multiplikationsabbildung wohldefiniert. Beachte

$$\begin{aligned}
&(f_n - f)(g_n - g) = (fg + f_n g_n) - (f g_n + f_n g)\\
&(f_n - f)g = f_n g - fg\\
&f(g_n - g) = f g_n - fg.
\end{aligned}$$

Also folgt mit dem Hinweis und der Dreiecksungleichung

$$d([f_n g_n], [fg]) \leq d([fg + f_n g_n], [f g_n + f_n g]) + d([f_n g], [fg]) + d([f g_n], [fg])$$

und somit $d([f_n g_n], [fg] \to 0$ mit $n \to +\infty$, was zu zeigen war.

4. Es sei λ ein reellwertiges Mass auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. Für $E \in \mathcal{A}$ definiere

$$\mu(E) := \sup\Big\{ \sum_{i=1}^{N} |\lambda(E_i)| : N \geq 1 \text{ und } (E_i)_{i=1,\ldots,N} \text{ ist eine Partition von } E \Big\}.$$

Beweise oder widerlege ob $\mu = |\lambda|$.

Lösung:

Die Aussage ist wahr. Da das Supremum über eine grössere Menge genommen wird, gilt $\mu(E) \leq |\lambda|(E)$. Wir zeigen nun die andere Ungleichung. Es sei $\varepsilon > 0$ und $(E_i)_{i\geq 1}$ eine Partition von E so dass

$$|\lambda|(E) - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda(E_i)|.$$

Für jede ganze Zahl $N \geq 1$ ist $F_1 := E_1, \ldots, F_N := E_N, F_{N+1} := \bigcup_{i=N+1}^{+\infty} E_i$ eine Partition von E. Somit

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda(E_i)| = \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} |\lambda(E_i)| \leq \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{N+1} |\lambda(F_i)| \leq \mu(E),$$

Siehe nächstes Blatt!

also

$$|\lambda|(E) - \varepsilon \leq \mu(E).$$

Fasst man alles zusammen, folgt $\mu(E) = |\lambda|(E)$.