Serie 11

Abgabetermin: *Mittwoch, 23.05.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Es sei λ das Lebesgue-Mass auf $(0,1)$ und μ das Zählmass auf der σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen in $(0,1)$. Zeige:

a) μ hat keine Lebesgue-Zerlegung bezüglich λ.

b) Obwohl $\lambda \ll \mu$ und λ beschränkt ist, existiert kein $f \in L^1(\mu)$ so, dass $d\lambda = f\, d\mu$.

2. **Konvergenzsatz von Vitali** Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Massraum. Eine Teilmenge $\Phi \subset L^1(\mu)$ hat *gleichmässig absolut stetige Integrale*, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so dass für alle $f \in \Phi$ gilt

$$\mu(E) < \delta \Longrightarrow \Big| \int_E f\, d\mu \Big| < \varepsilon.$$

a) Zeige: Jede endliche Teilmenge $\Phi \subset L^1(\mu)$ hat gleichmässig absolut stetige Integrale.

b) Beweise: Falls $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset L^1(\mu)$ gleichmässig absolut stetige Integrale hat und $f_n \to f$ mit $n \to +\infty$ fast überall, dann gilt $f \in L^1(\mu)$ und $f_n \to f$ in $L^1(\mu)$.

3. Es sei $[F] \in L^1(\mathbb{R}^k)$ eine Äquivalenzklasse von Funktionen. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^k$ heisst Lebesgue-Punkt von $[F]$ falls eine reelle Zahl $LF(x)$ existiert, so dass für alle $f \in [F]$ gilt

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - LF(x)|\, d\lambda(y) = 0.$$

Zeige:

a) Falls $x \in \mathbb{R}^k$ eine Lebesgue-Punkt von $[F]$ ist, dann ist die Zahl $LF(x) \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt.

b) Falls $x \in \mathbb{R}^k$ eine Lebesgue-Punkt von $f \in [F]$ ist, dann ist x ist ein Lebesgue-Punkt von $[F]$ und $LF(x) = f(x)$.

Bitte wenden!

c) Definiere

$$f_L(x) := \begin{cases} LF(x) & x \text{ ist ein Lebesgue-Punkt von } [F] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $f_L \in [F]$.

4. Beweise analog zu Lemma 7.3 aus der Vorlesung die folgende Aussage: Es sei I eine Indexmenge und es sei W die Vereinigung einer beliebigen Familie offener Bälle $B_i := B(x_i, r_i) \subset \mathbb{R}^k$ mit $i \in I$. Falls W beschränkt ist, dann existiert eine abzählbare Teilmenge $S \subset I$ so dass für alle verschiedenen $i, j \in S$ gilt

$$B_i \cap B_j = \varnothing \quad \text{und} \quad W \subset \bigcup_{i \in S} B(x_i, 5r_i)$$

.