

Lösung - Serie 11

Abgabetermin: *Mittwoch, 23.05.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: <https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/>

1. Es sei λ das Lebesgue-Mass auf $(0, 1)$ und μ das Zählmass auf der σ -Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen in $(0, 1)$. Zeige:

- a) μ hat keine Lebesgue-Zerlegung bezüglich λ .
- b) Obwohl $\lambda \ll \mu$ und λ beschränkt ist, existiert kein $f \in L^1(\mu)$ so, dass $d\lambda = f d\mu$.

Lösung:

- a) Es sei $\mu = \mu_a + \mu_s$. Der Träger von μ_s , im Folgenden mit A bezeichnet, ist eine Lebesgue-Nullmenge. Die Menge $(0, 1) \setminus A$ ist also insbesondere nicht leer. Wähle einen Punkt $x_0 \in (0, 1) \setminus A$. Es muss gelten

$$1 = \mu(\{x_0\}) = \mu_a(\{x_0\}) + \mu_s(\{x_0\}) = \mu_a(\{x_0\}).$$

Das Lebesguemass λ verschwindet aber auf $\{x_0\}$, deshalb ist μ_a nicht absolut stetig bezüglich λ . Somit hat μ keine Lebesgue-Zerlegung bezüglich λ .

- b) Wir erinnern, dass ein Mass λ genau dann absolut stetig bzgl. eines anderen Masses μ ist, wenn $\mu(A) = 0 \implies \lambda(A) = 0$ für alle messbaren A gilt. Dies ist hier offensichtlich der Fall:

$$\mu(A) = 0 \iff A = \emptyset \implies \lambda(A) = 0,$$

also ist $\lambda \ll \mu$. Wir zeigen die Behauptung, indem wir die gegenteilige Annahme auf einen Widerspruch führen. Angenommen es gäbe eine Funktion $f \in L^1(\mu)$, so dass

$$\lambda(B) = \int_B f d\mu.$$

Durch die Betrachtung von Positiv-Teil und Negativ-Teil können wir annehmen, dass $f \geq 0$. Dann folgt daraus

$$1 = \lambda((0, 1)) \geq \lambda(B) = \int_B f d\mu = \sup_{s \leq f} \int_B s d\mu = \sup_{s \leq f} \sum_{i \geq 1} f(\alpha_i) \mu(s^{-1}(\alpha_i) \cap B)$$

Bitte wenden!

Somit kann f höchstens auf einer abzählbaren Menge ungleich der Nullfunktion sein. Es sei $M \subset (0, 1)$ die Menge aller Punkte an denen f nicht verschwindet. Es gilt

$$\lambda((0, 1) \setminus M) = \int_{(0,1) \setminus M} f \, d\mu = 0. \quad (1)$$

Es gilt allerdings bereits $\lambda(M) = 0$, da M abzählbar ist. Somit kann (1) nicht gelten, also Widerspruch. Es gibt somit kein solches f .

- 2. Konvergenzsatz von Vitali** Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Massraum. Eine Teilmenge $\Phi \subset L^1(\mu)$ hat *gleichmässig absolut stetige Integrale*, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so dass für alle $f \in \Phi$ gilt

$$\mu(E) < \delta \implies \left| \int_E f \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

- a) Zeige: Jede endliche Teilmenge $\Phi \subset L^1(\mu)$ hat gleichmässig absolut stetige Integrale.
- b) Beweise: Falls $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset L^1(\mu)$ gleichmässig absolut stetige Integrale hat und $f_n \rightarrow f$ mit $n \rightarrow +\infty$ fast überall, dann gilt $f \in L^1(\mu)$ und $f_n \rightarrow f$ in $L^1(\mu)$.

Lösung: Siehe Aufgabe 2. in

<http://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2014/math/analysis3/loesung12.pdf>

- 3.** Es sei $[F] \in L^1(\mathbb{R}^k)$ eine Äquivalenzklasse von Funktionen. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^k$ heisst Lebesgue-Punkt von $[F]$ falls eine reelle Zahl $LF(x)$ existiert, so dass für alle $f \in [F]$ gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - LF(x)| \, d\lambda(y) = 0.$$

Zeige:

- a) Falls $x \in \mathbb{R}^k$ eine Lebesgue-Punkt von $[F]$ ist, dann ist die Zahl $LF(x) \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt.
- b) Falls $x \in \mathbb{R}^k$ eine Lebesgue-Punkt von $f \in [F]$ ist, dann ist x ein Lebesgue-Punkt von $[F]$ und $LF(x) = f(x)$.
- c) Definiere

$$f_L(x) := \begin{cases} LF(x) & x \text{ ist ein Lebesgue-Punkt von } [F] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $f_L \in [F]$.

Lösung:

Siehe nächstes Blatt!

a) Nehme an, dass y, y' Zahlen für den Lebesgue-Punkt x von $[F]$ sind. Wir berechnen

$$\begin{aligned} |y - y'| &= \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |y - y'| d\lambda(z) \\ &\leq \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |y - f(z)| d\lambda(z) + \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(z) - y'| d\lambda(z). \end{aligned}$$

Wir können also den Grenzwert $r \rightarrow 0^+$ betrachten und erhalten $y = y'$, wie gewünscht.

b) Nehme an, dass x ein Lebesgue-Punkt von $f \in [F]$ ist und es sei $g \in [F]$. Wir wissen, dass sich f und g nur auf einer Lebesgue-Nullmenge unterscheiden. Somit

$$\begin{aligned} &\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |g(y) - LF(x)| d\lambda(y) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - g(y)| d\lambda(y) \\ &+ \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - LF(x)| d\lambda(y) = 0. \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass x ein Lebesgue-Punkt von $[F]$ ist. Nach Definition eines Lebesgue-Punktes von f muss gelten, dass $LF(x) = f(x)$.

c) Dies ist eine direkte Konsequenz von Satz 7.7 im Skript und Teilaufgabe b).

4. Beweise analog zu Lemma 7.3 aus der Vorlesung die folgende Aussage: Es sei I eine Indexmenge und es sei W die Vereinigung einer beliebigen Familie offener Bälle $B_i := B(x_i, r_i) \subset \mathbb{R}^k$ mit $i \in I$. Falls W beschränkt ist, dann existiert eine abzählbare Teilmenge $S \subset I$ so dass für alle verschiedenen $i, j \in S$ gilt

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{und} \quad W \subset \bigcup_{i \in S} B(x_i, 5r_i)$$

.

Lösung: Beachte, dass die Zahl

$$R := \sup \{r_i : i \in I\}$$

endlich ist, weil W beschränkt ist. Setze $\mathcal{F} = \{B_i : i \in I\}$. Es bezeichne Ω die Menge welche alle disjunkten Familien $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ enthält, so dass falls $B \in \mathcal{F}$ einen Ball von $\mathcal{B}$ schneidet, dann gibt es einen Ball $B' \in \mathcal{B}$ so dass $B \cap B' \neq \emptyset$ und $2r' > r$, wobei r der Radius von B und r' der Radius von B' ist. Es sei B_0 ein Ball mit Radius grösser gleich $R/2$. Beachte $\{B_0\} \in \Omega$. Die Menge Ω ist also nicht leer. Es lässt sich einfach zeigen, dass Ω ein maximales Element $\mathcal{G}$ enthält. Es sei $B(x, r) \in \mathcal{F}$ ein Ball. Nach der Maximalität von $\mathcal{G}$ gibt es also ein $B(x', r') \in \mathcal{G}$ so dass $2r' \geq r$ und $B \cap B' \neq \emptyset$. Man sieht leicht, dass

$$B(x, r) \subset B(x', r + r + r') \subset B(x', 5r').$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathcal{G}$ abzählbar ist. Weil $\mathbb{R}^k$ separabel ist, kann $\mathcal{G}$ höchstens abzählbar sein.