Serie 12

Abgabetermin: *Mittwoch, 30.05.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und BV die Menge aller Funktionen auf $[a,b]$, welche beschränkte Variation auf $[a,b]$ haben. Zeige:

a) Die Menge BV enthält alle beschränkten monotonen Funktionen.

b) Für jede Funktion $f \in \mathsf{BV}$ existieren Funktionen $f_1, f_2 \in \mathsf{BV}$ derart, dass f_1 und f_2 beschränkt und monoton sind und $f = f_1 - f_2$ gilt.

c) Falls $f \in \mathsf{BV}$ linksstetig ist, dann können die Funktionen f_1 und f_2 aus Teilaufgabe **b)** so gewählt werden, dass sie ebenfalls linksstetig sind.

d) Falls $f \in \mathsf{BV}$ linksstetig ist, dann existiert ein Borelmass μ auf $[a,b]$, so dass

$$f(x) - f(a) = \mu\big([a,x)\big) \quad \text{für alle } (a \leq x \leq b).$$

2. Für $A, B \subset \mathbb{R}$ definiere $A + B := \big\{a + b : a \in A, b \in B\big\}$. Zeige:

a) Falls A und B positives Lebesguemass haben, dann existiert ein offenes nicht-leeres Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so dass $I \subset A + B$.

b) Es sei $G \subset \mathbb{R}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$, $G \neq \mathbb{R}$, und G Lebesgue messbar, dann ist G eine Lebesgue-Nullmenge.

3. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Massraum und $f\colon X \to [0, +\infty]$ eine messbare Funktion. Weiters, sei die Funktion $\varphi\colon [0,+\infty] \to [0,+\infty]$ monoton und absolut stetig auf $[0,T]$ für jedes $0 \leq T < +\infty$.

Zeige: Falls $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(t) \to \varphi(+\infty)$ für $t \to +\infty$, dann gilt

$$\int_X (\varphi \circ f)\, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu\big(\{x \in X : f(x) > t\}\big)\varphi'(t)\, dt.$$

Bemerkung: Insbesondere gilt für jede messbare Funktion $f\colon X \to [0,+\infty]$, dass

$$\int_X f\, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu\big(\{x \in X : f(x) > t\}\big)\, dt.$$