Lösung - Serie 12

Abgabetermin: *Mittwoch, 30.05.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und BV die Menge aller Funktionen auf $[a, b]$, welche beschränkte Variation auf $[a, b]$ haben. Zeige:

a) Die Menge BV enthält alle beschränkten monotonen Funktionen.

b) Für jede Funktion $f \in \mathsf{BV}$ existieren Funktionen $f_1, f_2 \in \mathsf{BV}$ derart, dass f_1 und f_2 beschränkt und monoton sind und $f = f_1 - f_2$ gilt.

c) Falls $f \in \mathsf{BV}$ linksstetig ist, dann können die Funktionen f_1 und f_2 aus Teilaufgabe **b)** so gewählt werden, dass sie ebenfalls linksstetig sind.

d) Falls $f \in \mathsf{BV}$ linksstetig ist, dann existiert ein Borelmass μ auf $[a, b]$, so dass

$$f(x) - f(a) = \mu\big([a, x)\big) \quad \text{für alle } (a \le x \le b).$$

Lösung:

a) Es sei φ eine beschränkte monoton steigende Funktion. Beachte

$$\sum_{k=1}^{N} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{N} \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \varphi(b) - \varphi(a),$$

für alle $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$. Also hat φ beschränkte Variation. Die Aussage falls φ monoton fallend ist, ist analog.

b) Definiere für alle $x \in [a, b]$

$$F(x) := \sup\Big\{ \sum_{k=1}^{N} |f(t_k) - f(t_{k-1})| : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = x \Big\}.$$

Die Funktion $f_1 := F - f$ ist beschränkt und monoton steigend. In der Tat, falls $a \le x_1 \le x_2 \le b$, dann gilt

$$F(x_1) + |f(x_1) - f(x_2)| \le F(x_2),$$

Bitte wenden!

also

$$F(x_1) - f(x_1) - (F(x_2) - f(x_2)) \leq 0,$$

wie gewünscht. Insbesondere gilt also $f_1(x) \leq f_1(b)$, dies zeigt, dass f_1 beschränkt ist. Definiere $f_2 = F + f$, es gilt

$$f = \frac{1}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_1.$$

c) Wir definieren $\Lambda(a) = F(a) = 0$ und für alle $a < x \leq b$

$$\Lambda(x) := \sup\big\{F(t) : a \leq t < x\big\}.$$

Weil F monoton steigend ist, folgt dass Λ ebenfalls monoton steigen ist. Die Funktion Λ ist nach Konstruktion linksstetig. Wir definieren

$$f_1 = \Lambda - f.$$

Die Funktion f_1 ist als Differenze linksstetiger Funktionen ebenfalls linksstetig. Deshalb gilt

$$f_1(x) = \lim_{t \to x^-} f_1(t) = \lim_{t \to x^-} (F(t) - f(t))\,. \tag{1}$$

Aus Teilaufgabe **b)** wissen wir, dass $F - f$ monoton steigend ist, also ist f_1 aufgrund von (1) ebenfalls monoton steigend. Man definiert f_2 analog.

d) Es sei $f = f_1 - f_2$, wobei f_1, f_2 linksstetig und monoton wachsend sind. Es bezeichne μ_{f_i}, $i = 1, 2$, das Lebesgue Stieltjes Integral assoziert mit f_i, siehe Serie 5, Aufgabe 3. Wir definieren $\mu = \mu_{f_1} - \mu_{f_2}$. Man überprüft nun leicht, das μ die geforderte Eigenschaft hat.

2. Für $A, B \subset \mathbb{R}$ definiere $A + B := \big\{a + b : a \in A, b \in B\big\}$. Zeige:

a) Falls A und B positives Lebesguemass haben, dann existiert ein offenes nicht-leeres Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so dass $I \subset A + B$.

b) Es sei $G \subset \mathbb{R}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$, $G \neq \mathbb{R}$, und G Lebesgue messbar, dann ist G eine Lebesgue-Nullmenge.

Lösung:

a) Da das Lebesgue-Mass μ von innen regulär ist, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset A$ so dass $\mu(A \setminus K) \leq \varepsilon$. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass A kompakt ist. Die Menge $C = -A$ ist ebenfalls kompakt. Wir definieren die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittels der Vorschrift

$$t \mapsto \mu(C_t \cap B),$$

wobei $C_t := C + t$. Weil A kompakt ist, folgt, dass f stetig ist. Mittels des Satzes von Fubini folgt

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_A(t - s)\chi_B(s)\, ds\, dt = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(t) \int_{\mathbb{R}} \chi_B(s)\, ds = \mu(A)\mu(B) > 0.$$

Siehe nächstes Blatt!

Die Funktion f ist stetig und nicht-negativ, weil das Integral von f positiv ist existiert deshalb ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit positiver Länge so dass $f(t) > 0$ für alle $t \in I$. Nach der Definition von f folgt also, dass $I \subset A + B$.

b) Nehme an, dass $G \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare Untergruppe ist mit positiven Lebesgue-Mass. Weil G eine Gruppe ist, folgt $G+G = G$. Nach Teilaufgabe **a)** existiert ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ so dass $I \subset G + G = G$. Weil G eine Gruppe ist, gilt $nx \in G$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Somit muss gelten

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} nI \subset G.$$

Also, $G = \mathbb{R}$.

3. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Massraum und $f\colon X \to [0, +\infty]$ eine messbare Funktion. Weiters, sei die Funktion $\varphi\colon [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ monoton und absolut stetig auf $[0, T]$ für jedes $0 \leq T < +\infty$.

Zeige: Falls $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(t) \to \varphi(+\infty)$ für $t \to +\infty$, dann gilt

$$\int_X (\varphi \circ f)\, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu\big(\{x \in X : f(x) > t\}\big)\varphi'(t)\, dt.$$

Bemerkung: Insbesondere gilt für jede messbare Funktion $f\colon X \to [0, +\infty]$, dass

$$\int_X f\, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu\big(\{x \in X : f(x) > t\}\big)\, dt.$$

Lösung: Wir definieren

$$E := \{(x, t) \in X \times [0, +\infty) : f(x) > t\}.$$

Für jedes $t \in [0, +\infty)$ setzen wir $E^t := \{x \in X : (x, t) \in E\}$. Beachte

$$\mu(E^t) = \int_E \chi_E(x, t)\, d\mu(x).$$

Mittels Fubini folgt

$$\int_0^{+\infty} \mu(E^t)\varphi'(t)\, dt = \int_X d\mu(x) \int_0^{+\infty} \chi_E(x, t)\varphi'(t)\, dt.$$

Für jedes $x \in X$ gilt $\chi_E(x, t) = 1$ falls $f(x) > t$ und $\chi_E(x, t) = 0$ falls $f(x) < t$. Deshalb

$$\int_0^{+\infty} \chi_E(x, t)\varphi'(t)\, dt = \int_0^{f(x)} \varphi'(t)\, dt = \varphi(f(x)) - \varphi(0) = \varphi(f(x));$$

dies impliziert die Aussage.