

Lösung - Serie 1

Abgabetermin: *Mittwoch, 28.02.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: <https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/>

1. Es seien X und Y Mengen und $f: X \rightarrow Y$ sei eine Abbildung.

a) Wenn $\mathcal{B}$ eine σ -Algebra auf Y ist, zeige, dass

$$\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{B}\}$$

eine σ -Algebra auf X ist.

b) Wenn $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra auf X ist, zeige, dass

$$\{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

eine σ -Algebra auf Y ist.

Lösung:

a) Beachte $X = f^{-1}(Y)$ und $(f^{-1}(B))^c = \{x \in X : f(x) \notin B\} = \{x \in X : f(x) \in B^c\} = f^{-1}(B^c)$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Eigenschaft (i) und (ii) in der Definition einer σ -Algebra sind also erfüllt. Weiter gilt für alle Folgen $(B_i)_{i \geq 1}$ in $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) &= \{x \in X : \text{es gibt eine natürliche Zahl } i \geq 1 \text{ so dass } f(x) \in B_i\} \\ &= \{x \in X : f(x) \in \bigcup_{i \geq 1} B_i\} = f^{-1}\left(\bigcup_{i \geq 1} B_i\right). \end{aligned}$$

Somit ist auch Eigenschaft (iii) in der Definition einer σ -Algebra erfüllt.

b) Wir definieren $\mathcal{B} = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$. Beachte $f^{-1}(Y) = X$. Es sei $E \subset Y$ so dass $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Weil $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra ist, folgt, dass $f^{-1}(E)^c = f^{-1}(E^c)$ ebenfalls in $\mathcal{A}$ enthalten ist, und somit $E^c \in \mathcal{B}$. Es sei $(B_i)_{i \geq 1}$ in $\mathcal{B}$ eine Folge in $\mathcal{B}$, weil

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \geq 1} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A},$$

ist Eigenschaft (iii) in der Definition einer σ -Algebra ebenfalls erfüllt.

Bitte wenden!

2. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ heisst *unterhalbstetig* (oder nach unten halb-stetig), falls für alle Punkte $x \in X$ und alle Folgen $(x_k)_{k \geq 1} \subset X$ mit $x_k \rightarrow x$ für $k \rightarrow +\infty$ gilt

$$f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_k).$$

Zeige: eine solche Funktion f ist Borel-messbar.

Lösung: Es sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Im Folgenden zeigen wir, dass die Menge $C_a := f^{-1}((-\infty, a])$ eine abgeschlossene Teilmenge von (X, d) ist. Es sei $(x_k)_{k \geq 1} \subset C_a$ eine Folge in C_a so dass $x_k \rightarrow x$ mit $k \rightarrow +\infty$ wobei $x \in X$. Um zu zeigen, dass C_a abgeschlossen ist, müssen wir zeigen, dass $x \in C_a$. Weil f unterhalbstetig ist gilt

$$f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) \leq a,$$

wobei die Ungleichung folgt, weil $x_k \in C_a$ und somit $f(x_k) \in (-\infty, a]$. Deshalb gilt $f(x) \in (-\infty, a]$, also $x \in C_a$, wie gewünscht. Beachte $U_a := f^{-1}((a, +\infty)) = f^{-1}((-\infty, a])^c$, die Menge U_a ist also offen und somit insbesondere eine Borelmenge. Nach Satz 1.8 (4) im Skript folgt nun sofort, dass f Borel-messbar ist.

3. Es sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf einem messbaren Raum $(X, \mathcal{A})$. Zeige, dass die Funktion f *genau dann* messbar ist, wenn die Menge $\{x : f(x) \geq r\}$ messbar ist für alle rationalen Zahlen $r \in \mathbb{Q}$.

Lösung: “ $\implies$ ” Es gilt

$$\{x : f(x) \geq r\} = f^{-1}([r, +\infty)),$$

somit ist die Menge $\{x : f(x) \geq r\}$ als Urbild der messbaren Menge $[r, +\infty)$ messbar für jede rationale Zahl r , wenn die Abbildung f bereits messbar ist.

“ $\impliedby$ ” Nehme an die Menge $R_r := \{x : f(x) \geq r\}$ ist messbar für jede rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$. Es sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl und $(r_k)_{k \geq 1} \subset \mathbb{Q}$ eine monoton fallende Folge rationaler Zahlen, so dass $r_k \rightarrow a$ mit $k \rightarrow +\infty$. Beachte

$$\{x : f(x) \leq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x : f(x) \geq r_k\}^c$$

und somit ist die Menge $L_a := \{x : f(x) \leq a\}$ messbar für jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$. Falls wir Satz 1.8 (4) benutzen möchten, ist der Beweis bereits jetzt vollständig, weil L_a^c messbar ist für alle $a \in \mathbb{R}$. Im Folgenden beweisen wir die Aufgabe ohne Verwendung von Satz 1.8 (4):

Analog wie die Messbarkeit der Menge L_a lässt sich zeigen, dass jede Menge $R_a := \{x : f(x) \geq a\}$ messbar ist für jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$. Es sei $C \subset \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Teilmenge, wir wissen, dass $U = C^c$ als offene Menge eine abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen ist, und somit ist $f^{-1}(C)$ gleich dem abzählbaren Schnitt von Mengen der Form $L_{a_k} \cup R_{b_k}$, wobei $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, deshalb ist $f^{-1}(C)$ messbar, weil die Mengen $L_{a_k} \cup R_{b_k}$ messbar sind. Da $f^{-1}(U) = f^{-1}(C)^c$ und die σ -Algebra $\mathcal{A}$ abgeschlossen ist unter der Bildung von Komplementen, folgt dass $f^{-1}(U)$ messbar ist, für alle offenen Mengen $U \in \mathbb{R}$. Deshalb ist die Funktion f Borel messbar.

Siehe nächstes Blatt!

4. Es bezeichne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ die Borel σ -Algebra der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie.

- a) Konstruiere eine Menge $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ die sowohl eine F_{σ} Menge als auch eine G_{δ} Menge ist.
- b) Konstruiere eine Menge $G \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ die eine G_{δ} Menge jedoch keine F_{σ} Menge ist. Benutze dazu Teilaufgabe d).
- c) Konstruiere eine Menge $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ die weder eine G_{δ} noch eine F_{σ} Menge ist.
- d)* Zeige, dass $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ eine F_{σ} Menge jedoch keine G_{δ} Menge ist.

Hinweis: Argumentiere indirekt und imitiere die Konstruktion der Cantor-Menge.

Lösung:

- a) Die Menge $A := \{0\}$ ist abgeschlossen und deshalb eine F_{σ} Menge. Beachte

$$A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i} \right),$$

A ist somit auch eine G_{δ} Menge.

- b) Es sei F eine F_{σ} Menge. Es ist eine unmittelbare Konsequenz von den De Morganschen Gesetzen, dass das Komplement $G := F^c$ eine G_{δ} Menge ist. Die Menge der irrationalen Zahlen, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ist wegen Teilaufgabe d) somit ein Beispiel einer Menge die eine G_{δ} Menge jedoch keine F_{σ} Menge ist.
- c) Wir definieren

$$F := \mathbb{Q} \cap [1, +\infty) \text{ und } G := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap (-\infty, -1).$$

Beachte, dass F eine F_{σ} Menge und G eine G_{δ} Menge ist. Es sei $B = F \cup G$. Nehme an B sei eine F_{σ} Menge, somit ist die Menge $G = B \cap (-\infty, -1]$ als endlicher Schnitt von F_{σ} Mengen ebenfalls eine F_{σ} Menge, wir wissen jedoch bereits aus Teilaufgabe c), dass G eine G_{δ} Menge ist, die keine F_{σ} Menge sein kann. Folglich ist B keine F_{σ} Menge. Analog zeigt man, dass B auch keine G_{δ} Menge sein kann. Die Menge B hat also die geforderten Eigenschaften.

- d) Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Nehme an

$$\mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} U_i,$$

wobei $U_i \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge ist für jedes $i \geq 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $U_{i+1} \subset U_i$ für jedes $i \geq 1$. Wir wissen aus der Topologie (siehe Question 1 von Exercise Sheet 1), dass für jede natürliche Zahl $i \geq 1$ die offene Menge U_i eine höchstens abzählbare disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen ist, d.h. es gilt

$$U_i = \bigcup_{k \in A_i} I_k^{(i)}, \quad (1)$$

Bitte wenden!

wobei $\mathcal{A}_i$ eine höchstens abzählbare Indexmenge und $I_k^{(i)}$ ein offenes Intervall ist für alle $k \in \mathcal{A}_i$.

Wir behaupten nun folgendes, für jede Menge $I \in \mathcal{A}_i$ gibt es eine natürliche Zahl $F(i, I) \geq i$ und zwei *disjunkte* Mengen $J_1, J_2 \in \mathcal{A}_{F(i, I)}$ so dass $J_1 \subset I$, $J_2 \subset I$ und so dass die Endpunkte von I und J_i alle unterschiedlich sind für $i = 1, 2$. Es seien $x, x' \in I$ zwei unterschiedliche Punkte mit $x, x' \in \mathbb{Q}$. Nehme an, dass für alle $k \geq i$ gilt $x, x' \in I_k$ wobei $I_k \in \mathcal{A}_k$. Die Menge

$$I_\infty = \bigcap_{k \geq i} I_k \subset \mathbb{Q}$$

ist ein Intervall, da die Menge I_k ein Intervall ist für alle $k \geq i$. Weil, $\mathbb{Q}$ keine nicht-degenerierten Intervalle enthält, muss gelten, dass I_∞ aus einem einzigen Element besteht und deshalb gilt $x = x'$. Dies ist ein Widerspruch und somit gibt es eine natürliche Zahl $N \geq i$ und zwei disjunkte Mengen $J'_1, J'_2 \in \mathcal{A}_N$ so dass $J'_1 \subset I$ und $J'_2 \subset I$. Wiederholt man die Konstruktion jeweils für J'_1 und für J'_2 erhält man eine natürliche Zahl $F(i, I) \geq i$ und vier disjunkte Mengen $J''_1, J''_2, J''_3, J''_4 \subset I$. Es muss nun zwei dieser vier Mengen geben, welche die geforderte Endpunkteigenschaft besitzen. Wir haben also gezeigt, dass es eine Zahl $F(i, I)$ mit den geforderten Eigenschaften gibt. Weil $U_{j+1} \subset U_j$ für alle $j \geq 1$ ist sofort ersichtlich, dass es für jede Zahl $j \geq F(i, I)$ ebenfalls zwei Mengen $J_1(I, j), J_2(I, j) \in \mathcal{A}_j$ mit den geforderten Eigenschaften gibt.

Nun können wir alles zusammenführen um die Cantor-Menge zu konstruieren. Wir definieren rekursiv die Folge $(C_\ell)_{\ell \geq 0}$, mit $C_0 = \{I_1^{(1)}\}$ und

$$C_{\ell+1} = \{J_1(I, N_{\ell+1}), J_2(I, N_{\ell+1}) : I \in C_\ell\}$$

wobei $N_\ell = \max\{F(N_\ell, I) : I \in C_\ell\}$. Beachte, dass, aufgrund der Endpunkteigenschaft, jede mögliche verschachtelte Folge $(J_\ell)_{\ell \geq 0}$ mit $J_\ell \in C_\ell$ einen nicht-leeren Schnitt hat, d.h. $\bigcap_{\ell \geq 0} J_\ell \neq \emptyset$. Nach Konstruktion gilt

$$\mathcal{C} := \bigcap_{\ell=0}^{\infty} \bigcup_{I \in C_\ell} I \subset \mathbb{Q}.$$

Dies ist ein Widerspruch, weil die Menge $\mathcal{C}$ gleichmächtig ist wie die Cantor-Menge und somit überabzählbar und deshalb nicht eine Teilmenge der rationalen Zahlen sein kann, weil die rationalen Zahlen abzählbar sind. Dieser Widerspruch beendet den Widerspruchsbeweis.