Serie 2

Abgabetermin: *Mittwoch, 07.03.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Es sei X eine überabzählbare Menge,

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ ist höchstens abzählbar oder } A^c \text{ ist höchstens abzählbar}\}.$$

Zeige, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist und dass $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ mit

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar;} \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ein Mass auf $(X, \mathcal{A})$ ist. Welche Funktionen $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind $\mathcal{A}$-messbar?

2. Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein Massraum und $\nu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ eine additive Abbildung mit $\mu(\varnothing) = 0$. Zeige:

a) Gilt $\nu(A_n) \to \nu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right)$ mit $n \to +\infty$ für jede verschachtelte Folge $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ messbarer Mengen, so ist ν ein Mass auf $(X, \mathcal{A})$.

b) Falls für alle verschachtelten Folgen $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ messbarer Mengen mit $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \varnothing$ folgt, dass $\nu(A_n) \to 0$ mit $n \to +\infty$, dann ist ν ein Mass auf $(X, \mathcal{A})$.

3. Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

a) Es sei μ ein Mass auf $(X, \mathcal{A})$ und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Wie kann man auf natürliche Weise ein Bildmass $f_*\mu$ auf Y definieren?

Hinweis: Benutze Aufgabe 1b) aus Serie 1.

b) Es sei $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ein Mass auf X und es sei $B \in \mathcal{A}$ eine messbare Menge. Wir definieren die Funktion $\mu\restriction_B\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ via

$$A \mapsto \mu(A \cap B).$$

Zeige, dass Abbildung $\mu\restriction_B$ wohldefiniert und ein Mass auf $(X, \mathcal{A})$ ist.

Bitte wenden!

4. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f, g\colon X \to [0, +\infty)$ messbare Funktionen. Es gelte

$$\int_A f \, d\mu \leq \int_A g \, d\mu < +\infty$$

für alle Mengen $A \in \mathcal{A}$. Zeige, dass es eine Menge $M \in \mathcal{A}$ gibt mit $\mu(M^c) = 0$ und

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in M.$$