Lösung - Serie 2

Abgabetermin: *Mittwoch, 07.03.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Es sei X eine überabzählbare Menge,

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ ist höchstens abzählbar oder } A^c \text{ ist höchstens abzählbar }\}.$$

Zeige, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist und dass $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ mit

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar;} \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ein Mass auf $(X, \mathcal{A})$ ist. Welche Funktionen $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind $\mathcal{A}$-messbar?

Lösung:

- *$\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra.* Weil die leere Menge abzählbar ist, ist Eigenschaft 1) in der Definition einer σ-Algebra erfüllt. Eigenschaft 2) folgt direkt aus der Definition von $\mathcal{A}$. Es sei nun $(A_k)_{k\geq 1} \subset \mathcal{A}$ eine Folge. Einerseits, falls alle A_k abzählbar sind, wissen wir aus Analysis I, dass dann deren Vereinigung ebenfalls abzählbar ist und also insbesondere in $\mathcal{A}$ liegt. Andererseits, nehme an, dass es eine natürliche Zahl $k_0 \geq 1$ gibt, so dass $A_{k_0}^c$ abzählbar ist. Beachte
$$\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k^c \subset A_{k_0}^c,$$
somit ist das Komplement der Vereiningung der Mengen A_k abzählbar und wir haben gezeigt, dass Eigenschaft 3) in der Definition einer σ-Algebra erfüllt ist.
- *μ ist ein Mass.* Es sei $(A_k)_{k\geq 1} \subset \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen von X. Falls alle A_k abzählbar sind, ist auch die Menge $A := \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ abzählbar und somit gilt
$$0 = \mu(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k).$$
Nehme nun an, dass es eine natürliche Zahl $k_0 \geq 1$ gibt, so dass A_{k_0} überabzählbar ist. Weil $A_k \subset A_{k_0}^c$, folgt, dass die Menge A_k abzählbar ist für alle $k \neq k_0$. Somit
$$1 = \mu(A) = \mu(A_{k_0}) + 0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k),$$
wie gewünscht (die erste Identität folgt weil $A_{k_0} \subset A$).

Bitte wenden!

- *Alle $\mathcal{A}$-messbare Funktionen* Wir behaupten, dass

$$\begin{aligned}&\big\{f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}: f \text{ ist } \mathcal{A}\text{- messbar}\big\}\\&=\big\{f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}: \text{ es gibt genau ein } y\in\overline{\mathbb{R}} \text{ s. d. } f^{-1}(y)\in\mathcal{A} \text{ überabzählbar ist}\big\}.\end{aligned}$$

Wir bezeichnen die linke Seite der obigen Gleichung mit L und die rechte Seite mit R. Es sei $f\in L$, wir zeigen im Folgenden, dass $f\in R$. Es sei

$$\alpha_0 := \inf\big\{\alpha\in\overline{\mathbb{R}}:\alpha\geq 0,\ \text{die Menge } f^{-1}([-\alpha,\alpha]) \text{ ist überabzählbar }\big\}.$$

Falls $\alpha_0=0$, dann ist die Menge $f^{-1}(\{0\})$ überabzählbar und weil $\{\alpha\}\subset\{0\}^c$ für alle $\alpha\in\overline{\mathbb{R}}$ mit $\alpha\neq 0$, folgt in diesem Fall $f\in R$. Nehme nun an $\alpha_0>0$. Es sei $\varepsilon>0$ so dass $2\varepsilon<2\alpha$. Die Menge $f^{-1}([-\varepsilon,+\varepsilon])$ ist höchstens abzählbar für alle solche $\varepsilon>0$, also ist die Menge $f^{-1}(\{-\alpha_0,\alpha_0\})$ überabzählbar, weil $f^{-1}([-\alpha_0,\alpha_0])$ überabzählbar ist und

$$f^{-1}([-\alpha_0,\alpha_0]) = f^{-1}(\{-\alpha_0,\alpha_0\})\cup\bigcup_{0<\varepsilon<\alpha} f^{-1}([-\varepsilon,+\varepsilon]).$$

Beachte, dass die Menge $f^{-1}(\{-\alpha_0,\alpha_0\})$ die disjunkte Vereinigung von $f^{-1}(-\alpha_0)$ und $f^{-1}(\alpha_0)$ ist, also ist genau eine der Mengen $f^{-1}(-\alpha_0)$, $f^{-1}(\alpha_0)$ überabzählbar und somit $f\in R$. Die Inklusion $R\subset L$ folgt direkt aus der definition der σ-Algebra $\mathcal{A}$, weil $f^{-1}(y)\subset f^{-1}((a,+\infty])$ oder $f^{-1}((a,+\infty])\subset f^{-1}(y)^c$ für alle $a\in\mathbb{R}$. Wir haben dadurch $L=R$ gezeigt.

2. Es sei $(X,\mathcal{A})$ ein Massraum und $\nu\colon\mathcal{A}\to[0,+\infty]$ eine additive Abbildung mit $\mu(\varnothing)=0$. Zeige:

a) Gilt $\nu(A_n)\to\nu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}A_k\right)$ mit $n\to+\infty$ für jede verschachtelte Folge $A_1\subset A_2\subset\cdots$ messbarer Mengen, so ist ν ein Mass auf $(X,\mathcal{A})$.

b) Falls für alle verschachtelten Folgen $A_1\supset A_2\supset\cdots$ messbarer Mengen mit $\bigcap_{k=1}^{+\infty}A_k=\varnothing$ folgt, dass $\nu(A_n)\to 0$ mit $n\to+\infty$, dann ist ν ein Mass auf $(X,\mathcal{A})$.

Lösung:

a) Es sei $(A_k)_{k\geq 1}\subset\mathcal{A}$ eine Folge disjunkter Elemente von $\mathcal{A}$. Wir definieren

$$B_k := \bigcup_{\ell=1}^{k} A_\ell$$

für alle ganzen Zahlen $k\geq 1$. Beachte $B_k\subset B_{k+1}$ für alle $k\geq 1$ und deshalb folgt

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}A_k\right)=\nu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}B_k\right)=\lim_{k\to+\infty}\nu(B_k)=\lim_{k\to+\infty}\sum_{\ell=1}^{k}\nu(A_\ell),$$

wie gewünscht, wobei wir für die letzte Gleichheit die endliche Additivität von ν ausgenutzt haben.

Siehe nächstes Blatt!

b) Es sei $(A_k)_{k\geq 1} \subset \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Elemente von $\mathcal{A}$. Wir definieren

$$B_k := \bigcup_{\ell=k}^{+\infty} A_\ell$$

für alle ganzen Zahlen $k \geq 1$. Beachte, dass $B_k \supset B_{k+1}$ für alle $k \geq 1$ und $\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k = \varnothing$. Deshalb folgt,

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) &= \nu(B_1) = \lim_{k\to+\infty} \nu\left(\bigcup_{\ell=1}^{k-1} A_\ell\right) + \nu(B_k) \\ &= \lim_{k\to+\infty} \sum_{\ell=1}^{k-1} \nu(A_\ell) + \lim_{k\to+\infty} \nu(B_k) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \nu(A_\ell) + 0,\end{aligned}$$

wie gewünscht, wobei wir mehrmals die endliche Additivität von ν ausgenutzt haben.

3. Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

a) Es sei μ ein Mass auf $(X, \mathcal{A})$ und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Wie kann man auf natürliche Weise ein Bildmass $f_*\mu$ auf Y definieren?

Hinweis: Benutze Aufgabe 1b) aus Serie 1.

b) Es sei $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ein Mass auf X und es sei $B \in \mathcal{A}$ eine messbare Menge. Wir definieren die Funktion $\mu\restriction_B\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ via

$$A \mapsto \mu(A \cap B).$$

Zeige, dass Abbildung $\mu\restriction_B$ wohldefiniert und ein Mass auf $(X, \mathcal{A})$ ist.

Lösung:

a) Wir definieren

$$f_*\mathcal{A} := \left\{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\right\}$$

und

$$\begin{aligned}&f_*\mu\colon f_*\mathcal{A} \to [0, +\infty] \\ &E \mapsto \mu(f^{-1}(E)).\end{aligned}$$

Wegen Aufgabe 1b) in Serie 1 wissen wir bereits, dass $f_*\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, im Folgenden zeigen wir, dass $f_*\mu$ ein Mass auf Y ist. Beachte

$$f_*\mu(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0,$$

Bitte wenden!

wobei die letzte Gleichheit vom Satz 1.14 (1) im Skript folgt. Es sei $(E_k)_{k\geq 1} \subset f_*\mathcal{A}$ eine Folge disjunkter Teilmengen. Die Folge $(f^{-1}(E_k))_{k\geq 1} \subset \mathcal{A}$ ist ebenfalls eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen ist. Es gilt

$$f_*\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \mu\left(f^{-1}(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k)\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} f^{-1}(E_k)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu\left(f^{-1}(E_k)\right)$$

und somit haben wir auch gezeigt, dass $f_*\mu$ σ-additiv ist.

b) Weil $A \cap B \in \mathcal{A}$ für alle $A \in \mathcal{A}$ ist die Abbildung wohldefiniert. Weiterhin ist

$$\mu\restriction_B (\varnothing) = \mu(\varnothing \cap B) = \mu(\varnothing) = 0.$$

Es sei $(A_k)_{k\geq 1} \subset \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen; so ist $(A_k \cap B)_{k\geq 1} \subset \mathcal{A}$ weiterhin eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen. Somit

$$\mu\restriction_B\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \cap B\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k \cap B),$$

also ist $\mu\restriction_B$ ein Mass auf X.

4. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f, g\colon X \to [0, +\infty)$ messbare Funktionen. Es gelte

$$\int_A f\, d\mu \leq \int_A g\, d\mu < +\infty$$

für alle Mengen $A \in \mathcal{A}$. Zeige, dass es eine Menge $M \in \mathcal{A}$ gibt mit $\mu(M^c) = 0$ und

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in M.$$

Lösung: Wegen

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu < +\infty$$

sind f, g integrierbar. Wir definieren die Menge $M := \{x \in X : 0 \leq g(x) - f(x)\}$ und $h := g - f$. Weil $M = h^{-1}([0, +\infty))$ ist M messbar, da die Funktion h als Differenz messbarer Funktionen messbar ist. Wir definieren

$$A_n := h^{-1}\left(\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right]\right)$$

für alle $n \geq 0$ (mit der Konvention $\frac{1}{0} = +\infty$). Die Menge M^c ist die disjunkte Vereinigung der Mengen A_n. Weil

$$\int_{A_n} g - f\, d\mu \leq -\frac{1}{n+1}\mu(A_n) \leq 0,$$

Siehe nächstes Blatt!

muss gelten $\mu(A_n) = 0$, weil sonst

$$\int_{A_n} g \, d\mu < \int_{A_n} f \, d\mu,$$

was nicht möglich ist nach Voraussetzung. Es gilt also

$$\mu(M^c) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) = 0,$$

wie gewünscht.

Alternativ lässt sich die Aufgabe auch lösen indem man die Funktion $f - g$ auf M^c mit Treppenfunktionen approximiert und daraus folgert, dass falls $\mu(M^c) > 0$, dann ist

$$\int_{M^c} f \, d\mu > \int_{M^c} g \, d\mu,$$

was der Voraussetzung widerspricht.