Serie 3

Abgabetermin: *Mittwoch, 14.03.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum. Zeige: Ist $(E_k)_{k\geq 1} \subset \mathcal{A}$ eine Folge messbarer Mengen in X mit $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mu(E_k) < +\infty$, dann liegen fast alle Punkte $x \in X$ in höchstens endlich vielen E_k.

2. In der Vorlesung haben wir das Lemma von Fatou (Satz 2.6) mit Hilfe dem Satz über monotone Konvergenz (Satz 2.4) bewiesen. Beweise nun umgekehrt den Satz über monotone Konvergenz mit Hilfe des Lemmas von Fatou.

3. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f \in L^1(\mu)$ eine integrable Funktion. Beweise folgende Aussage:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\int\limits_A |f| \, d\mu < \varepsilon$$

für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$.

4. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f_k \colon X \to [0, +\infty]$, $k \geq 1$, messbare Funktionen, so dass $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq 0$ und $f_k \to f$ punktweise mit $k \to +\infty$. Zeige, dass falls $f_1 \in L^1(\mu)$ gilt, dann folgt

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_X f_k \, d\mu = \int\limits_X f \, d\mu.$$

Wieso ist die obige Implikation ohne die Voraussetzung $f_1 \in L^1(\mu)$ im Allgemeinen *nicht* richtig?

Bitte wenden!

5. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Massraum, d.h. $\mu(X) < +\infty$. Weiter seien $f_k \colon X \to \mathbb{R}$, $k \geq 1$, beschränkte messbare Funktionen, so dass $f_k \to f$ gleichmässig mit $k \to +\infty$. Beweise oder widerlege die Aussage:

"Die Funktion f ist messbar und es gilt

$$\lim_{k \to +\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu."$$

Was geschieht im Allgemeinen falls $\mu(X) = +\infty$?