Lösung - Serie 3

Abgabetermin: *Mittwoch, 14.03.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum. Zeige: Ist $(E_k)_{k\geq 1} \subset \mathcal{A}$ eine Folge messbarer Mengen in X mit $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mu(E_k) < +\infty$, dann liegen fast alle Punkte $x \in X$ in höchstens endlich vielen E_k.

Lösung:

- *erste Lösung:* Wir definieren
$$A := \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{\ell=k}^{+\infty} E_\ell.$$
Es sei $x \in X$ ein Punkt. Beachte $x \in A$ genau dann wenn x in unendlich vielen der Mengen E_k liegt. Satz 1.14 (5) sagt uns, dass
$$\mu(A) = \lim_{k\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{\ell=k}^{+\infty} E_\ell\right),$$
weil $\mu\left(\bigcup_{\ell=1}^{+\infty} E_\ell\right) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mu(E_k) < +\infty$, wobei
$$A_k := E_k \setminus \bigcup_{\ell=1}^{k-1} E_\ell.$$
Somit gilt
$$\mu(A) \leq \lim_{k\to+\infty} \sum_{\ell=k}^{+\infty} \mu\left(E_\ell\right) = 0$$
und deshalb $\mu(A) = 0$, was zu zeigen war.
- *zweite Lösung:* Kommt später...

2. In der Vorlesung haben wir das Lemma von Fatou (Satz 2.6) mit Hilfe dem Satz über monotone Konvergenz (Satz 2.4) bewiesen. Beweise nun umgekehrt den Satz über monotone Konvergenz mit Hilfe des Lemmas von Fatou.

Lösung: Es sei $f_k\colon X \to [0, +\infty]$, wobei $k \geq 1$, eine Folge von messbaren Funktionen, so dass $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ und $f_k \to f$ punktweise mit $k \to +\infty$. Beachte $f_k(x) = \inf\limits_{\ell \geq k} f_\ell(x)$ für alle $k \geq 1$. Fatous Lemma sagt uns

$$\int\limits_X f\,d\mu = \int\limits_X \liminf_{k\to+\infty} f_k\,d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_X f_k\,d\mu \leq \lim_{k\to+\infty} \int_X f_k\,d\mu.$$

Weil $f_k \leq f$ für alle $x \in X$ wissen wir aus der Monotonie des Integrals, dass

$$\int_X f_k\,d\mu \leq \int\limits_X f\,d\mu$$

für alle $x \in X$. Deshalb folgt der Satz über monotone Konvergenz.

3. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f \in L^1(\mu)$ eine integrable Funktion. Beweise folgende Aussage:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\int\limits_A |f|\,d\mu < \varepsilon$$

für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$.

Lösung: Falls $f = 0$, dann ist die Aussage richtig. Im Folgenden gehen wir davon aus, dass f nicht die Nullfunktion ist. Zuerst nehmen wir an, dass die Funktion f beschränkt ist, d.h. $M := \max\{|f(x)| : x \in X\} < +\infty$. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben und es sei $A \in \mathcal{A}$. Aus der Monotonie des Integrals folgt

$$\int\limits_A |f|\,d\mu \leq \int\limits_A M\,d\mu = M\mu(A).$$

Falls also $\mu(A) < \frac{\varepsilon}{M}$, dann folgt das Geforderte. Wir haben die Aussage somit gezeigt, falls f beschränkt ist.

Es sei nun f unbeschränkt. Wir definieren $f_k(x) = \min\{k, |f(x)|\}, x \in X$, für alle $k \geq 1$. Beachte, $f_k \to |f|$ punktweise mit $k \to +\infty$. Mit Hilfe des Satzes über monotone Konvergenz erhalten wir

$$\int\limits_A |f| = \int\limits_X \chi_A |f| = \lim_{k\to+\infty} \int\limits_X \chi_A f_k = \lim_{k\to+\infty} \int\limits_A f_k$$

Siehe nächstes Blatt!

wobei χ_A die charakteristische Funktion von A ist, d.h. $\chi_A(x) = 1$ falls $x \in A$ und $\chi_A(x) = 0$ sonst. Wähle $k_0 \geq 1$, so dass

$$\int_A |f| - \int_A f_k < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Weil f_{k_0} beschränkt ist, wissen wir, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\int_A f_{k_0} \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2},$$

falls $\mu(A) < \delta$. Fasst man alles zusammen, erhält man

$$\int_A |f| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \int_A f_{k_0} \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

falls $\mu(A) < \delta$, was zu zeigen war.

4. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f_k \colon X \to [0, +\infty]$, $k \geq 1$, messbare Funktionen, so dass $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq 0$ und $f_k \to f$ punktweise mit $k \to +\infty$. Zeige, dass falls $f_1 \in L^1(\mu)$ gilt, dann folgt

$$\lim_{k \to +\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Wieso ist die obige Implikation ohne die Voraussetzung $f_1 \in L^1(\mu)$ im Allgemeinen *nicht* richtig?

Lösung: Weil $f_1 \geq f_k$ und f_1, f_k nur nicht-negative Funktionswerte haben, gilt $|f_k| \leq |f_1|$ für alle $k \geq 1$. Somit folgt, unter Verwendung der Monotonie des Integrals, dass $f_k \in L^1(\mu)$ für alle $k \geq 1$, weil nach Voraussetzung $f_1 \in L^1(\mu)$. Mit denselben Argumenten folgt ebenfalls, dass $f \in L^1(\mu)$.

Wir definieren $g_k := f_1 - f_k$ für alle $k \geq 1$. Jede Funktion g_k ist messbar und hat nur nicht-negative Funktionswerte. Des weiteren gilt $g_1 \leq g_2 \leq \ldots$ und $g_k \to f_1 - f$ punktweise mit $k \to +\infty$. Die Voraussetzungen für den Satz über monotone Konvergenz sind also erfüllt und wir erhalten

$$\int_X f_1 - f \, d\mu = \lim_{k \to +\infty} \int_X g_k \, d\mu.$$

Wir können nun Satz 2.9 (1) (Linearität des Integrals) anwenden und erhalten

$$\int_X f_1 \, d\mu - \int_X f \, d\mu = \lim_{k \to +\infty} \int_X g_k \, d\mu = \lim_{k \to +\infty} \int_X f_1 \, d\mu - \lim_{k \to +\infty} \int_X f_k \, d\mu,$$

und deshalb gilt

$$\lim_{k \to +\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu,$$

Bitte wenden!

wie gefordert.

Frage: Wieso ist die obige Implikation ohne die Voraussetzung $f_1 \in L^1(\mu)$ im Allgemeinen *nicht* richtig?

Antwort: Es sei $f_k \colon \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ die charakteristische Funktion der Menge

$$A_k := \{-k, \dots, 0, \dots, k\}^c,$$

d. h. $f_k(x) = 1$ falls $x \in A_k$ und $f_k(x) = 0$ sonst. Es sei $\mu_{\mathbb{Z}}$ das Zählmass auf $\mathbb{Z}$. Beachte, dass $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq 0$ und $f_k \to f := 0$ (Nullfunktion) punktweise mit $k \to +\infty$. Weiterhin gilt

$$\int_{\mathbb{Z}} |f_k| \, d\mu_{\mathbb{Z}} = +\infty$$

für alle $k \geq 1$. Da

$$0 = \int_X f \, d\mu_{\mathbb{Z}} \neq \lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{Z}} |f_k| \, d\mu_{\mathbb{Z}} = +\infty,$$

kann die Voraussetzung $f_1 \in L^1(\mu)$ im Allgemeinen *nicht* weggelassen werden.

5. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Massraum, d.h. $\mu(X) < +\infty$. Weiter seien $f_k \colon X \to \mathbb{R}$, $k \geq 1$, beschränkte messbare Funktionen, so dass $f_k \to f$ gleichmässig mit $k \to +\infty$. Beweise oder widerlege die Aussage:

"Die Funktion f ist messbar und es gilt

$$\lim_{k \to +\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu."$$

Was geschieht im Allgemeinen falls $\mu(X) = +\infty$?

Lösung: Nach Satz 1.10 (2) ist die Funktion f messbar. Desweiteren ist die Funktion f beschränkt, weil die Folge der f_k's gleichmässig gegen f konvergiert und jedes f_k beschränkt ist. Weil $\mu(X) < +\infty$, folgt $f \in L^1(\mu)$. Es existert ein $k_0 \geq 1$, so dass

$$\sup_{x \in X} |f_k(x) - f(x)| < 1 \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Es sei

$$M_0 := \max\big\{|f_k(x)| : x \in X, 1 \leq k \leq k_0\big\}.$$

Wir definieren die Funktion $g \colon X \to \mathbb{R}$ via

$$x \mapsto M_0 + 1 + \max\big\{|f(x)| : x \in X\big\}.$$

Da $\mu(X) < +\infty$ ist g integrabel und es gilt $|f_k| \leq g$ für alle $k \geq 1$. Somit können wir den Satz von Lebesgue (Satz 2.10) anwenden und erhalten

$$\lim_{k \to +\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu,$$

Siehe nächstes Blatt!

wie gefordert.

Falls $\mu(X) = +\infty$, dann ist die Aussage im Allgemeinen *nicht* mehr richtig. Betrachte $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}}, \mu_{\mathbb{Z}})$ wobei $\mu_{\mathbb{Z}}$ das Zählmass auf $\mathbb{Z}$ bezeichnet. Wir definieren für alle $k \geq 1$ die Funktion $f_k \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ via

$$f_k(n) := \begin{cases} \frac{1}{|n|} & \text{if } |n| \geq k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beachte, dass $f_k \to 0 =: f$ gleichmässig mit $k \to +\infty$. Weil die harmonische Reihe divergiert, gilt

$$\int_{\mathbb{Z}} f_k \, d\mu_{\mathbb{Z}} = 2 \sum_{n=k} \frac{1}{n} = +\infty$$

und somit

$$+\infty = \lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{Z}} f_k \, d\mu_{\mathbb{Z}} \neq \int_{\mathbb{Z}} f \, d\mu_{\mathbb{Z}} = 0.$$