Serie 4

Abgabetermin: *Mittwoch, 21.03.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Beweise folgenden Teil der Proposition 3.4 aus der Vorlesung:

Das Mengensystem

$$\mathcal{A} := \left\{ A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ ist eine Vereinigung endlich vieler Quader} \right\}$$

ist eine Algebra.

2. Es sei X eine Menge und $\mathcal{M}_X$ eine Mengenalgebra auf X. Zeige:

a) Die Mengenalgebra $\mathcal{M}_X$ ist ein kommutativer Ring mit Eins mit den folgenden Operationen:

$$E + F := (E \setminus F) \cup (F \setminus E),$$
$$E \cdot F := E \cap F$$

und $X \in \mathcal{M}_X$ als Eins.

b) Die Mengenalgebra $\mathcal{M}_X$ ist eine Algebra im Sinne der Algebra, d.h. die additive Gruppe $(\mathcal{M}_X, +)$ ausgestattet mit der Ringstruktur von oben ist zugleich ein Vektorraum über einem Körper K.

c)* Finde eine sinnvolle Charakterisierung aller Untergruppen von $(2^F, +)$, wobei F eine endliche Menge ist.

3. Beweise die folgende Aussage: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Lebesgue Nullmenge genau dann, wenn eine Folge $(Q_k)_{k \geq 1}$ von Quadern in $\mathbb{R}^n$ existiert, so dass

1. $\sum_{k=1}^{+\infty} V(Q_k) < +\infty$.
2. Jeder Punkt von A liegt in unendlich vielen der Quader Q_k.

Bitte wenden!

4. Es sei $\Omega := [0,1]$ das abgeschlossene Einheitsintervall versehen mit der Standardtopologie und $A \subset \Omega$ eine Teilmenge. Weiter bezeichne ν das äussere Lebesgue Mass auf Ω. Beweise oder widerlege jeweils folgende Aussagen:

a) Ist A nirgends dicht, so gilt $\nu(A) = 0$.

b) Ist $\nu(A) = 0$, so ist A nirgends dicht.

c) Ist A dicht, so gilt $\nu(A) > 0$.

d) Ist $\nu(A) > 0$, so existiert ein nichtleeres, offenes Intervall $I \subset [0,1]$, in welchem $A \cap I$ dicht liegt.

e) Ist $\nu(A) = 1$, so ist A dicht in $[0,1]$.