Lösung - Serie 4

Abgabetermin: *Mittwoch, 21.03.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: <https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/>

1. Beweise folgenden Teil der Proposition 3.4 aus der Vorlesung:

Das Mengensystem

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ ist eine Vereinigung endlich vieler Quader}\}$$

ist eine Algebra.

Lösung: Die Bedingung, dass $\mathcal{A}$ stabil ist unter endlichen Vereinigungen folgt direkt aus der Definition von $\mathcal{A}$. Die Menge $\mathbb{R}^n$ ist das n -stufige Kartesische Produkt des Intervalls $\mathbb{R}$ und somit gilt $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$. Es bleibt zu zeigen, dass falls

$$A := \bigcup_{k=1}^d Q_k \in \mathcal{A}, \tag{1}$$

wobei die Q_k 's Quader sind, dann folgt $A^c \in \mathcal{A}$. Wir unterteilen den Beweis in drei Teilschritte:

1. *Das Komplement eines Quaders ist in der Algebra.* Nehme an, dass $n = 1$, und es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir definieren

$$I_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \in I^c, x > y \text{ für alle } y \in I\}$$

$$I_- := \{x \in \mathbb{R} : x \in I^c, x < y \text{ für alle } y \in I\}.$$

Die Mengen I_- und I_+ sind Intervalle und es gilt $I^c = I_+ \cup I_-$. Deshalb gilt $I^c \in \mathcal{A}$ im Falle $n = 1$. Es sei nun $n > 1$ beliebig und $Q = I_1 \times \cdots \times I_n \in \mathbb{R}^n$ ein Quader. Beachte

$$Q = \bigcap_{k=1}^n Q'_k,$$

wobei $Q'_k := \mathbb{R} \times \cdots \times I_k \times \cdots \times \mathbb{R}$ für alle $1 \leq k \leq n$. Mittels den De Morganschen Gesetzen und $I_k^c = (I_k)_+ \cup (I_k)_-$ erhalten wir

$$\begin{aligned} Q^c &= \bigcup_{k=1}^n \mathbb{R} \times \cdots \times I_k^c \times \cdots \times \mathbb{R} \\ &= \bigcup_{k=1}^n \mathbb{R} \times \cdots \times (I_k)_+ \times \cdots \times \mathbb{R} \cup \bigcup_{k=1}^n \mathbb{R} \times \cdots \times (I_k)_- \times \cdots \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Also ist $Q^c \in \mathcal{A}$ wiederum falls $n > 1$.

Bitte wenden!

2. *Der Schnitt zweier Elemente von $\mathcal{A}$ ist wieder in $\mathcal{A}$.* Es seien $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^n$ zwei Quader. Man sieht sofort, dass $Q_1 \cap Q_2$ wieder ein Quader ist. Unter Verwendung des Distributivitäts Gesetz $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$, folgt nun, dass $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$, falls $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$.
3. *Beweis der Aussage mit Induktion über die Anzahl Quader* Es sei $A_k \in \mathcal{A}$ die Vereinigung von $k \geq 1$ Quadern und es sei Q ein Quader. Es gilt

$$(A_k \cup Q)^c = A_k^c \cap Q^c$$

und somit folgt wegen 1. und 2., dass $(A_k \cup Q)^c \in \mathcal{A}$ falls $A_k \in \mathcal{A}$. Die Aussage folgt also mit Induktion über $k \geq 1$.

2. Es sei X eine Menge und $\mathcal{M}_X$ eine Mengenalgebra auf X . Zeige:

- a) Die Mengenalgebra $\mathcal{M}_X$ ist ein kommutativer Ring mit Eins mit den folgenden Operationen:

$$\begin{aligned} E + F &:= (E \setminus F) \cup (F \setminus E), \\ E \cdot F &:= E \cap F. \end{aligned}$$

und $X \in \mathcal{M}_X$ als Eins.

- b) Die Mengenalgebra $\mathcal{M}_X$ ist eine Algebra im Sinne der Algebra, d.h. die additive Gruppe $(\mathcal{M}_X, +)$ ausgestattet mit der Ringstruktur von oben ist zugleich ein Vektorraum über einem Körper K .
- c) * Finde eine sinnvolle Charakterisierung aller Untergruppen von $(2^F, +)$, wobei F eine endliche Menge ist.

Lösung:

- a) Beachte, dass gilt $E + F = (E \cap F^c) \cup (F \cap E^c)$ für alle $E, F \in \mathcal{M}_X$. Deshalb

$$\begin{aligned} (E + F) + G &= (((E \cap F^c) \cup (F \cap E^c)) \cap G^c) \cup (G \cap ((E \cap F^c) \cup (F \cap E^c))^c) \\ &= (((E \cap F^c) \cup (F \cap E^c)) \cap G^c) \cup (G \cap ((E^c \cup F) \cap (F^c \cap E))) \\ &= (E \cap F^c \cap G^c) \cup (F \cap E^c \cap G^c) \cup (G \cap E^c \cap F^c) \cup (G \cap F \cap E) \\ &= (E \cap F^c \cap G^c) \cup (E \cap G \cap F) \cup (F \cap G^c \cap E^c) \cup (G \cap F^c \cap E^c) \\ &= (E \cap ((F^c \cup G) \cap (G^c \cap F))) \cup (F \cap G^c \cap E^c) \cup (G \cap F^c \cap E^c) \\ &= (E \cap ((F \cap G^c) \cup (G \cap F^c))^c) \cup (((F \cap G^c) \cup (G \cap F^c)) \cap E^c) \\ &= E + (F + G), \end{aligned}$$

für alle $E, F, G \in \mathcal{M}_X$ und somit ist die binäre Relation $+$ assoziativ. Weiters, beachte $E + \emptyset = \emptyset + E = E$ und $E + E = \emptyset$ für alle $E \in \mathcal{M}_X$. Wir haben also gezeigt, dass $(\mathcal{M}_X, +)$ eine Gruppe ist. Man sieht sofort, dass $(\mathcal{M}_X, +)$ abelsch ist.

Siehe nächstes Blatt!

Wir müssen nun noch zeigen, dass $(\mathcal{M}_X, \cdot)$ ein Monoid ist und dass die Multiplikation distributiv ist. Beachte $(E \cdot F) \cdot G = (E \cap F) \cap G = E \cap F \cap G = E \cap (F \cap G) = E \cdot (F \cdot G)$ für alle $E, F, G \in \mathcal{M}_X$ und $X \cdot E = X \cap E = E$, deshalb ist $(\mathcal{M}_X, \cdot)$ ein Monoid.

Es gilt

$$\begin{aligned} E \cdot (F + G) &= E \cap ((F \cap G^c) \cup (G \cap F^c)) = (E \cap F \cap G^c) \cup (E \cap G \cap F^c) \\ &= ((E \cap F) \cap (E^c \cup G^c)) \cup ((E \cap G) \cap (E^c \cup F^c)) \\ &= ((E \cap F) \cap (E \cap G)^c) \cup ((E \cap G) \cap (E \cap F)^c), \\ &= E \cdot F + E \cdot G \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} (F + G) \cdot E &= ((F \cap G^c) \cap E) \cup ((G \cap F^c) \cap E) \\ &= ((F \cap E) \cap (G^c \cup E^c)) \cup ((G \cap E) \cap (F^c \cup E^c)) \\ &= ((F \cap E) \cap (G \cap E)^c) \cup ((G \cap E) \cap (F \cap E)^c) \\ &= F \cdot E + G \cdot E. \end{aligned}$$

Fasst man alles zusammen haben wir gezeigt, dass $(\mathcal{M}_X, +, \cdot, X)$ ein Ring mit Eins ist.

- b) Es sei F_2 der Körper mit zwei Elementen. Wir definieren die Skalarmultiplikation via $0 \cdot E := \emptyset$ und $1 \cdot E := E$ für alle $E \in \mathcal{M}_X$. Weil $E + E = \emptyset$ folgt sofort, dass $(\alpha + \beta)E = \alpha E + \beta E$ für alle $\alpha, \beta \in F_2$ und für alle $E \in \mathcal{M}_X$. Die verbleibenden Axiome eines Vektorraumes sind sofort ersichtlich und deshalb haben wir gezeigt, dass $(\mathcal{M}_X, +)$ mit dieser Skalarmultiplikation ausgestattet ein F_2 -Vektorraum ist.
- c) Es sei $F = \{1, \dots, n\}$, wobei $n \geq 1$. Beachte zuerst, dass $(2^F, +)$ ein n -dimensionaler F_2 -Vektorraum ist, wenn man $(2^F, +)$ mit der Skalarmultiplikation von Teilaufgabe b) ausstattet. In der Tat, $b_i := \{i\}$, für $1 \leq i \leq n$, ist eine Basis von 2^F .

Es sei U eine Untergruppe von $(2^F, +)$. Nach Definition der Skalarmultiplikation ist es offensichtlich, dass U ebenfalls ein Untervektorraum ist. Es sei $v_1, \dots, v_d$ eine Basis von U . Jeder Vektor $u \in U$ hat eine eindeutige Darstellung

$$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_d v_d,$$

wobei $\alpha_i \in F_2$ für alle $1 \leq i \leq d$. Betrachte die Abbildung $\Phi: U \rightarrow 2^{[d]}$, wobei $[d] = \{1, \dots, d\}$, gegeben durch

$$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_d v_d \mapsto \{k : \alpha_k \neq 0\} \subset \{1, \dots, d\}.$$

Die Abbildung Φ ist ein Gruppenisomorphismus zwischen $(U, +)$ und $(2^{[d]}, +)$. Also ist jede Untergruppe von $(2^F, +)$ isomorph zu $(2^{[d]}, +)$ für ein $1 \leq d \leq n$.

Bitte wenden!

3. Beweise die folgende Aussage: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Lebesgue Nullmenge genau dann, wenn eine Folge $(Q_k)_{k \geq 1}$ von Quadern in $\mathbb{R}^n$ existiert, so dass

1. $\sum_{k=1}^{+\infty} V(Q_k) < +\infty$.

2. Jeder Punkt von A liegt in unendlich vielen der Quader Q_k .

Lösung: “ $\implies$ ” Es sei A eine Lebesgue Nullmenge. Weil A eine Lebesgue Nullmenge ist, existiert für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ eine Überdeckung $A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} Q_{(k,n)}$ von A mit kompakten Quadern $Q_{(k,n)}$ so dass

$$\sum_{k=1}^{+\infty} V(Q_{(k,n)}) < \frac{1}{2^n}.$$

Es sei $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine surjektive Abbildung. Wir definieren $Q_k := Q_{\varphi(k)}$. Beachte,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} V(Q_k) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

und nach Konstruktion liegt jedes $x \in A$ in unendlich vielen Quadern Q_i , was zu zeigen war.

“ $\impliedby$ ” Es sei Q_k eine Folge von Quadern welche Bedingung 1. und Bedingung 2. erfüllt. Es sei

$$A := \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{i=k}^{+\infty} Q_i.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \geq 1$ so dass

$$\sum_{k=N}^{+\infty} V(Q_k) < \varepsilon.$$

Weil jedes $x \in A$ in unendlich vielen Q_k 's liegt, folgt $A \subset \bigcup_{k=N}^{+\infty} Q_k$, und wir haben dadurch gezeigt, dass A eine Lebesgue Nullmenge ist.

4. Es sei $\Omega := [0, 1]$ das abgeschlossene Einheitsintervall versehen mit der Standardtopologie und $A \subset \Omega$ eine Teilmenge. Weiter bezeichne ν das äussere Lebesgue Mass auf Ω . Beweise oder widerlege jeweils folgende Aussagen:

a) Ist A nirgends dicht, so gilt $\nu(A) = 0$.

b) Ist $\nu(A) = 0$, so ist A nirgends dicht.

c) Ist A dicht, so gilt $\nu(A) > 0$.

d) Ist $\nu(A) > 0$, so existiert ein nichtleeres, offenes Intervall $I \subset [0, 1]$, in welchem $A \cap I$ dicht liegt.

Siehe nächstes Blatt!

e) Ist $\nu(A) = 1$, so ist A dicht in $[0, 1]$.

Lösung:

a) Es sei $\{q_1, \dots, q_n, \dots\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ eine Abzählung. Wir definieren

$$I_n := \left(q_n - \frac{1}{2^{n+1}}, q_n + \frac{1}{2^{n+1}} \right), \quad n \geq 1$$

und $A := [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$. Die Teilmenge A ist abgeschlossen und nach Konstruktion nirgends dicht (weil $q_k \notin A$ für alle $k \geq 1$). Weiter gilt $\nu(A) \geq \frac{1}{2}$. Dies widerlegt die Aussage.

b) Es sei $\{q_1, \dots, q_n, \dots\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ eine Abzählung. Wir definieren

$$Q_k^{(\varepsilon)} := \left(q_k - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_k + \frac{\varepsilon}{2^n} \right).$$

Es gilt

$$\nu(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \nu(Q_k^{(\varepsilon)}) = \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$ und deshalb $\nu(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$. Die Teilmenge $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist dicht und also insbesondere nicht nirgends dicht. Dies widerlegt die Aussage.

c) Weil $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ abzählbar ist, folgt, dass $\nu(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$ (siehe Teilaufgabe b)). Es gibt also eine dichte Teilmenge von Ω die ebenfalls eine Nullmenge ist. Dies widerlegt die Aussage.

d) Es bezeichne $A := [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ die Menge aus Teilaufgabe a). Wir wissen bereits, dass $\nu(A) > 0$. Weiters, sei $(a, b) \subset \Omega$ ein nicht degeneriertes Intervall. Es existiert somit eine rationale Zahl $q_k \in (a, b)$. Weil (a, b) offen ist, gibt es ein offenes nicht-leeres Intervall J so dass $q_k \in J \subset (a, b)$ and $J \subset I_k$. Deshalb gilt $J \in (A \cap (a, b))^c$ und die Menge $A \cap (a, b)$ ist nicht dicht in (a, b) . Dies widerlegt die Aussage.

e) Es sei $(a, b) \subset \Omega$ ein nicht degeneriertes Intervall. Es gilt $A \cup (a, b) \setminus A \subset \Omega$ und deshalb $\nu((a, b) \setminus A) = 0$. Dadurch gilt $\nu(A \cap (a, b)) = a - b > 0$ und somit muss gelten $(a, b) \cap A \neq \emptyset$. Weil die Intervalle $(a, b) \subset \Omega$ eine Basis der Standardtopologie auf Ω bilden, folgt, dass die Teilmenge $A \subset \Omega$ dicht in Ω liegt. Dies Aussage ist also richtig.