# Serie 5

**Abgabetermin:** *Mittwoch, 28.03.2018* in die Fächli im HG F 28.

**Homepage der Vorlesung:** `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

**1.** Beweise: Nicht jede Lebesgue-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eine Borelmenge.

**2.** Nach Satz 3.11 (5) aus der Vorlesung existiert für jede lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein $\triangle(T) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $A \in \mathcal{M}$ gilt $\lambda(T(A)) = \triangle(T)\lambda(A)$, wobei $\lambda$ das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Beweise: $\triangle(T) = |\det(T)|$.

**3.** **Äusseres Lebesgue-Stieltjes-Mass**. Es sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und linksstetig. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ setze $\lambda_F([a, b[) = F(b) - F(a)$. Das äussere Lebesgue-Stieltjes-Mass $\Lambda_F$ auf $\mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Lambda_F(A) := \inf\Big\{\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_F([a_k, b_k[) : A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k[, \text{ wobei } a_k \leq b_k\Big\}, \quad A \subset \mathbb{R}.$$

Berechne für $a \leq b$ die Masse $\Lambda_F(\{a\}), \Lambda_F([a, b])$ und $\Lambda_F(]a, b[)$.

**4.** **Allgemeine Cantormenge** Es sei $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ eine Folge von positiven reellen Zahlen so dass $\gamma_k \leq 3^{-k}$. Man zerlege das Einheitsintervall $[0, 1]$ in drei disjunkte Intervalle $I_0, I_1, I_2$, wobei das zentrierte mittlere Intervall $I_1$ offen ist und die Länge $\gamma_1$ hat. Man zerlege nun jedes Intervall $I_{a_1}$, für $a_1 = 0, 2$, in drei Teilintervalle $I_{a_1 0}, I_{a_1 1}, I_{a_1 2}$, wobei das zentrierte mittlere Intervall $I_{a_1 1}$ offen ist und die Länge $\gamma_2$ hat. Ebenso verfahre man mit $I_{a_1 a_2}$ $(a_1, a_2 = 0, 2)$ usw.

Es bezeichne $G$ die Vereinigung aller offenen mittleren Intervalle $I_1, I_{01}, I_{21}, I_{001}, \ldots,$ und $C = [0, 1] \setminus G$ die allgemeine Cantormenge.

**a)** Zeige: $C$ ist abgeschlossen, nirgends dicht und hat die Kardinalität von $\mathbb{R}$.

**b)** Berechne des Lebesgue-Mass von $C$.

**c)** Wann ist $C$ Jordan messbar?

**Bitte wenden!**

**5.*** Konstruiere eine Borelmenge $E \subset [0,1]$ derart, dass für jede offene nicht-leere Menge $U \subset [0,1]$ gilt

$$0 < \lambda(E \cap U) < \lambda(U),$$

wobei $\lambda$ das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}$ bezeichnet.