Lösung - Serie 5

Abgabetermin: *Mittwoch, 28.03.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Beweise: Nicht jede Lebesgue-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eine Borelmenge.

Lösung: Es bezeichne C die Cantor-Menge, gegeben durch

$$C := \bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k,$$

wobei $C_0 = [0,1]$ und $C_k = \frac{C_{k-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{k-1}}{3}\right)$. Es gilt

$$\lambda(C) = \lim_{k\to+\infty} \lambda(C_k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{2^k}{3^k} = 0.$$

Hierbei bezeichnet λ das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}$. Es lässt sich zeigen, dass

$$C = \left\{x \in [0,1] : x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 3^{-k}, a_k \in \{0,2\}\right\}$$

und somit ist C gleichmächtig wie $\mathbb{R}$. Weil $\lambda(C) = 0$ gilt auch $\lambda(A) = 0$ für alle $A \in 2^C$, dies ist der Vollständigkeit des Lebesgue-Masses geschuldet. Es bezeichne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ die Menge aller Borel messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$. Es gilt $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\{[q,+\infty) : q \in \mathbb{Q}\})$, und deshalb folgt, weil die Menge $\{[q,+\infty) : q \in \mathbb{Q}\}$ abzählbar ist, dass $B_{\mathbb{R}}$ gleichmächtig wie $\mathbb{R}$. Die Kardinalität der Potenzmenge einer Menge ist immer strikt grösser als die Kardinalität der Menge und somit ist nicht jede Menge $A \in 2^C$ Borel messbar. Weil $\mathsf{card}(C) = \mathsf{card}(\mathbb{R}) < \mathsf{card}(2^{\mathbb{R}}) = \mathsf{card}(2^C)$.

2. Nach Satz 3.11 (5) aus der Vorlesung existiert für jede lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein $\triangle(T) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $A \in \mathcal{M}$ gilt $\lambda(T(A)) = \triangle(T)\lambda(A)$, wobei λ das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Beweise: $\triangle(T) = |\det(T)|$.

Lösung:

- Eine Lösungskizze ist im Skript unter Bemerkung 3.13 zu finden.

- Im folgenden präsentieren wir eine weitere Lösungsskizze, die Konzepte aus der Gruppentheorie verwendet. Diese Lösung ist nicht prüfungsrelevant. Es lässt sich leicht zeigen, $\triangle(GT) = \triangle(G)\triangle(T)$ für alle linearen Abbildungen $G, T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Die Abbildung $\triangle\colon \mathsf{Gl}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist somit ein Gruppenhomomorphismus, wenn wir $\mathsf{Gl}_n(\mathbb{R})$ mit der Matrixmultiplikation und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der üblichen Multiplikation ausstatten. Es sei $G := \mathsf{Gl}_n(\mathbb{R})$ und $G^{ab} := G/[G,G]$ die Abelisierung von G, wobei $[G,G]$ die Kommutator-Untergruppe von G ist. Es lässt sich zeigen, dass $[G,G] = \mathsf{Sl}_n(\mathbb{R})$, $G^{ab} \cong \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und dass die Abbildung $\pi\colon G \to G^{ab}$ wobei $\pi(g) = g[G,G]$, die Determinantenabbildung ist, also $\pi = \det$. Aufgrund der universellen Eigenschaft der Abelisierung gilt somit $\triangle = k \circ \det$, wobei k ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ ist. Es ist eine Konsequenz der Gauss-Elimination, dass jede invertierbare Matrix A als Produkt einer Diagonalmatrix D und einer Matrix $S \in \mathsf{Sl}_n(\mathbb{R})$ geschrieben werden kann, d.h. $A = SD$. Man sieht leicht, dass $\triangle(D) = |\det(D)|$ und somit $k(\det(D)) = k(\det(A)) = \triangle(A) = \triangle(S)\triangle(D) = \triangle(D) = |\det(D)|$ und somit $k(x) = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir haben also gezeigt, $\triangle(T) = |\det(T)|$ falls T eine invertierbare lineare Abbildung ist. Falls T nicht invertierbar ist, dann ist $T(\mathbb{R}^n)$ in einem $(n-1)$-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^n$ enthalten und deshalb gilt $0 = \lambda(T(\mathbb{R}^n)) = |\det(T)|\lambda(\mathbb{R}^n)$, was noch zu zeigen war.

3. Äusseres Lebesgue-Stieltjes-Mass. Es sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und linksstetig. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ setze $\lambda_F([a,b[) = F(b) - F(a)$. Das äussere Lebesgue-Stieltjes-Mass Λ_F auf $\mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Lambda_F(A) := \inf\left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_F([a_k, b_k[) : A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k[, \text{ wobei } a_k \leq b_k \right\}, \quad A \subset \mathbb{R}.$$

Berechne für $a \leq b$ die Masse $\Lambda_F(\{a\}), \Lambda_F([a,b])$ und $\Lambda_F(]a,b[)$.

Lösung: Wir behaupten, dass jede Menge $[a,b[$ Λ_F-messbar ist. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ mit $\Lambda_F(D) < +\infty$. Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle eine Überdeckung $D \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k[$, wobei $a_k \leq b_k$, so dass $\sum_{k=1}^{+\infty} \Lambda_F([a_k, b_k[) \leq \Lambda_F(D) + \varepsilon$. Beachte

$$\Lambda_F\big([a_k, b_k[\big) = \Lambda_F\big([a_k, b_k[\cap[a,b[\big) + \Lambda_F\big([a_k, b_k[\setminus[a,b[\big)$$

und somit

$$\Lambda_F(D \cap [a,b[) + \Lambda_F\left(D \setminus [a,b[\right) \leq \Lambda_F(D) + \varepsilon.$$

Die Menge $[a,b[$ ist somit Λ_F messbar. Es gilt

$$\{a\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [a, a + \frac{1}{k}[$$

und deshalb ist die Menge $\{a\}$ (als Schnitt von Λ_F-messbaren Mengen) ebenfalls Λ_F-messbar. Weiter ist $[a,b] = [a,b[\cup\{b\}$ und $]a,b[= [a,b[\cap\{a\}^c$. Deshalb sind die Mengen $[a,b]$ und $]a,b[$ ebenfalls Λ_F-messbar. Weil Λ_F auf allen Λ_F-messbaren Mengen ein Mass ist, folgt

$$\Lambda_F([a,b]) = \Lambda_F([a,b[) + \Lambda_F(\{b\}), \quad \Lambda_F(]a,b[) = \Lambda_F([a,b[) - \Lambda_F(\{a\}).$$

Siehe nächstes Blatt!

Es genügt also $\Lambda_F(\{a\})$ zu berechnen. Wir definieren

$$F(a)^+ = \lim_{x\downarrow a} F(x) = \inf\{F(x) : x > a\}.$$

Beachte

$$\Lambda_F(\{a\}) = \lim_{k\to+\infty} \Lambda_F\left([a, a+\frac{1}{k}[\right) = \lim_{k\to+\infty} F\left(a+\frac{1}{k}\right) - F(a) = F(a)^+ - F(a),$$

und somit haben wir alles gezeigt.

4. Allgemeine Cantormenge Es sei $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ eine Folge von positiven reellen Zahlen so dass $\gamma_k \leq 3^{-k}$. Man zerlege das Einheitsintervall $[0,1]$ in drei disjunkte Intervalle I_0, I_1, I_2, wobei das zentrierte mittlere Intervall I_1 offen ist und die Länge γ_1 hat. Man zerlege nun jedes Intervall I_{a_1}, für $a_1 = 0, 2$, in drei Teilintervalle $I_{a_1 0}, I_{a_1 1}, I_{a_1 2}$, wobei das zentrierte mittlere Intervall $I_{a_1 1}$ offen ist und die Länge γ_2 hat. Ebenso verfahre man mit $I_{a_1 a_2}$ $(a_1, a_2 = 0, 2)$ usw.

Es bezeichne G die Vereinigung aller offenen mittleren Intervalle $I_1, I_{01}, I_{21}, I_{001}, \ldots,$ und $C = [0,1] \setminus G$ die allgemeine Cantormenge.

a) Zeige: C ist abgeschlossen, nirgends dicht und hat die Kardinalität von $\mathbb{R}$.

b) Berechne des Lebesgue-Mass von C.

c) Wann ist C Jordan messbar?

Lösung:

a) Da eine beliebige Vereinigung offener Mengen offen ist, ist die Menge C ist als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen. Um zu zeigen, dass C nirgends dicht ist, müssen wir zeigen, dass kein nicht-degeneriertes Intervall (a,b) existiert mit $(a,b) \subset C$. Es sei

$$C_k := \bigcup_{(a_1,\ldots,a_k)\in\{0,2\}^k} I_{a_1\cdots a_k}. \tag{1}$$

nach Konstruktion gilt

$$C = \bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k. \tag{2}$$

Nehme nun an, dass $(a,b) \subset C$, somit gilt $(a,b) \subset C_k$ für alle $k \geq 1$. Es bezeichne l_k die Intervall-Länge der Intervalle aus denen C_k zusammengesetzt ist. Nach Konstruktion gilt

$$l_k := \frac{1}{2^{k-1}}\left(1 - \sum_{\ell=1}^{k} 2^{\ell-1}\gamma_\ell\right) \leq \frac{1}{2^{k-1}},$$

und somit muss gelten $b - a \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ für alle $k \geq 1$ und deshalb $a = b$. Wir haben also gezeigt, dass C nirgends dicht ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass C die Kardinalität von $\mathbb{R}$

Bitte wenden!

hat. Aus dem Basisjahr ist bekannt, dass $\mathsf{card}(\{0,2\}^{\mathbb{N}}) = \mathsf{card}(\mathbb{R})$. Es sei $\mathbf{a} := (a_k)_{k\geq 1} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ und es bezeichne $[\mathbf{a}]_k := (a_1, \ldots, a_k)$. Aufgrund von (1) und (2) wissen wir, dass

$$C = \bigcup_{\mathbf{a}\in\{0,2\}^{\mathbb{N}}} I_{\mathbf{a}}, \quad \text{wobei } I_{\mathbf{a}} := \bigcap_{k=1}^{+\infty} I_{[\mathbf{a}]_k}. \tag{3}$$

Das Intervallverschachterlungsprinzip sagt uns, dass die Menge $I_{\mathbf{a}}$ genau aus einem Punkt besteht, da die abgeschlossenen Intervalle $I_{[\mathbf{a}]_k}$ verschachtelt sind und die Intervall-Längen der $I_{[\mathbf{a}]_k}$'s gegen Null konvergieren. Wir behaupten nun, dass $I_{\mathbf{a}_1} \neq I_{\mathbf{a}_2}$ falls $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2$. Falls $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2$ existiert ein $N \geq 1$, so dass $[\mathbf{a}_1]_N \neq [\mathbf{a}_2]_N$. Nach Konstruktion sind die Intervalle $I_{[\mathbf{a}_1]_N}$, $I_{[\mathbf{a}_2]_N}$ disjunkt und somit folgt direkt, dass $I_{\mathbf{a}_1} \neq I_{\mathbf{a}_2}$. Mittels (3) haben wir also gezeigt, dass C eine überabzählbare Vereinigung von disjunkten nicht-leeren einelementigen Mengen ist und deshalb gilt $\mathsf{card}(C) = \mathsf{card}(\mathbb{R})$.

b) Es sei $\varepsilon_k > 0$, so dass $\gamma_k + \varepsilon_k = 3^{-k}$. Beachte

$$\begin{aligned} 1 = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} &= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k\gamma_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k\varepsilon_k = \lambda(G) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k\varepsilon_k. \end{aligned}$$

und somit

$$\lambda(C) = 1 - \lambda(G) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k\varepsilon_k.$$

Es gilt also $\lambda(C) = 0$ genau dann wenn C die klassische Cantor-Menge ist mit $\gamma_k = 3^{-k}$.

c) Es sei $J = \big\{[a,b[: a \leq b\big\}$ und es sei

$$\mathcal{J} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ ist eine endliche disjunkte Vereinigung von Elementen aus } J\}.$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} i^+(A) &:= \inf\{\lambda(M) : M \in \mathcal{J}, A \subset M\} \\ i^-(A) &:= \sup\{\lambda(M) : M \in \mathcal{J}, M \subset A\}. \end{aligned}$$

Eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ heisst *Jordan-messbar*, falls $i^+(A) = i^-(A)$. Aus Teilaufgabe **a)** wissen wir, dass C nirgends dicht ist. Somit gilt $i^-(C) = 0$. Wir wissen

$$\lambda(C) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda(I_k) : I_k \text{ Intervall}, C \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k\Big\}$$

und deshalb gilt $\lambda(C) \leq i^+(C)$. In Teilaufgabe **b)** haben wir gezeigt, dass $\lambda(C) > 0$ genau dann wenn ein $k_0 \geq 1$ existiert mit $\gamma_{k_0} < 3^{-k_0}$. Als Konsequenz ist die allgemeine Cantormenge also genau dann Jordan messbar falls C die klassische $\frac{1}{3}$-Cantormenge ist.

Siehe nächstes Blatt!

5.* Konstruiere eine Borelmenge $E \subset [0,1]$ derart, dass für jede offene nicht-leere Menge $U \subset [0,1]$ gilt

$$0 < \lambda(E \cap U) < \lambda(U),$$

wobei λ das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Lösung: Es sei $\{U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots\}$ eine Abzählung aller nicht-leeren Intervalle mit rationalen Endpunkten, welche eine offene Teilmenge von $[0,1]$ sind. Wir behaupten, dass für jede offene nicht-leere Menge $U \subset [0,1]$ zwei abgeschlossene nirgends dichte Mengen $A(U), B(U)$ existieren so dass

1. $A(U), B(U) \subset U$,
2. $A(U) \cap B(U) = \varnothing$,
3. $0 < \lambda(A(U)), \lambda(B(U)) < \lambda(U)$.

Dies ist eine direkte Konsequenz der Teilaufgaben **a)**, **b)** von Aufgabe 4. Weil $A(U)$ und $B(U)$ abgeschlossen und nirgends dicht sind, folgt, dass die Menge $U \cap A(U)^c \cap B(U)^c$ offen und nicht-leer ist. Wir konstruieren die Folge $(A_k, B_k)_{k \geq 1}$ rekursiv wie folgt.

$$\begin{aligned}
&(A_1, B_1) := (A(U_1), B(U_1)) \\
&(A_k, B_k) := \left(A\left(U_k \cap \bigcap_{\ell=1}^{k-1} A_\ell^c \cap \bigcap_{\ell=1}^{k-1} B_\ell^c \right), B\left(U_k \cap \bigcap_{\ell=1}^{k-1} A_\ell^c \cap \bigcap_{\ell=1}^{k-1} B_\ell^c \right) \right).
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt, $A_k \cap B_\ell = \varnothing$ für alle $k, \ell \geq 1$. Wir definieren

$$E := \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k.$$

Nach Konstruktion hat E die geforderten Eigenschaften. In der Tat, es sei $U \subset [0,1]$ eine offene nicht-leere Teilmenge. Es existiert ein $N \geq 1$ so dass $U_N \subset U$ und somit

$$\begin{aligned}
&0 < \lambda(A_N) \leq \lambda(E \cap U_N) \leq \lambda(E \cap U) = \lambda\big((E \cap B_N) \cup (E \cap B_N^c \cap U)\big) \\
&= \lambda(E \cap B_N^c \cap U) < \lambda(B_N) + \lambda(E \cap B_N^c \cap U) \leq \lambda(U),
\end{aligned}$$

wie gewünscht.