Lösung - Serie 6

Abgabetermin: *Mittwoch, 11.04.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{H}^n$-messbare Menge mit $\mathcal{H}^n(A) < +\infty$ und es sei $f \colon A \to Y$ eine Lipschitz-stetige Abbildung in einen metrischen Raum (Y, d). Zeige: die Menge $f(A)$ ist eine $\mathcal{H}^n$-messbare Menge.

Lösung: Nach Satz 3.10 im Skript existiert eine F_σ Menge $F \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\mathcal{H}^n(A \setminus F) = 0$. Weil F eine F_σ Menge ist, gibt es abgeschlossene Mengen $C_k \subset \mathbb{R}^n$, wobei $k \geq 1$, so dass

$$F = \bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k.$$

Wir definieren für alle ganzen Zahlen $\ell \geq 1$

$$K_\ell := B_\ell(0) \cap \bigcup_{k=1}^{\ell} C_k,$$

wobei $B_\ell(0) := \big\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq \ell\big\}$. Jede Menge K_ℓ ist kompakt und es gilt

$$F = \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} K_\ell.$$

Es gilt somit

$$f(A) = f(A \setminus F) \cup \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} f(K_\ell).$$

Die Mengen $f(K_\ell)$ sind als stetige Bilder kompakter Mengen wiederum kompakt, also insbesondere Borelmengen und somit $\mathcal{H}^n$-messbar. Falls die Menge $f(A \setminus F)$ also $\mathcal{H}^n$-messbar ist folgt somit, dass die Menge $f(A)$ auch $\mathcal{H}^n$-messbar ist. Es sei $\delta > 0$. Weil für alle Überdeckungen $A \setminus F \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} U_k$ mit $\mathsf{diam}(U_k) \leq \delta$ gilt

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathsf{diam}(f(U_k))^n \leq \mathsf{Lip}(f)^n \sum_{k=1}^{+\infty} \mathsf{diam}(U_k)^n$$

folgt $\mathcal{H}^n_\delta(f(A \setminus F)) \leq \mathsf{Lip}(f)^n \mathcal{H}^n_\delta(A \setminus F)$ und somit $\mathcal{H}^n(f(A \setminus F)) = 0$. Wir haben also gezeigt, dass $f(A \setminus F)$ eine $\mathcal{H}^n$- Nullmenge ist und somit insbesondere $\mathcal{H}^n$-messbar, was noch zu zeigen war.

Bitte wenden!

2. Es sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ eine stetige injektive Kurve in einen metrischen Raum (X, d). Wir definieren die Bogenlänge von γ als

$$L(\gamma) := \sup \Big\{ \sum_{i=1}^{N} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) : N \geq 1 \text{ und } 0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_N \leq 1 \Big\}.$$

Zeige: $\mathcal{H}^1\big(\gamma\left([0,1]\right)\big) = L(\gamma)$.

Lösung: Wir setzten $K := \gamma([0,1])$. Wir teilen den Beweis in zwei Teile; zuerst beweisen wir eine Hilfsaussage und danach zeigen wir $\mathcal{H}^1\big(\gamma\left([0,1]\right)\big) = L(\gamma)$.

1. *(Hilfsaussage)* In diesem Teilabschnitt zeigen wir, dass gilt

$$d(\gamma(0), \gamma(1)) \leq \mathcal{H}^1(K). \tag{1}$$

Es sei $\varepsilon > 0$ und $C_k \subset X$, mit $k \geq 1$, so dass $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} C_k$ und

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathsf{diam}(C_k) \leq \mathcal{H}^1(K) + \varepsilon.$$

Für alle $k \geq 1$ definieren wir

$$M_k = \max\left(\gamma^{-1}\big(\overline{C_k}\big)\right).$$

Nach Konstruktion gilt $d(\gamma(a), \gamma(M_k)) \leq \mathsf{diam}(C_k)$ für alle $a \in \gamma^{-1}\big(\overline{C_k}\big)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so dass

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) < \varepsilon, \quad \text{falls } |x - y| < \delta(\varepsilon).$$

Wir setzen

$$I_k = \Big\{ x \in [0,1] : \text{ es gibt ein } a \in \gamma^{-1}\big(\overline{C_k}\big) \text{ so dass } |x - a| < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right) \Big\}.$$

Weil die offenen Mengen I_k die kompakte Menge $[0,1]$ überdecken gibt es endlich viele Indizes $k_1, \ldots, k_N$, so dass

$$[0,1] = \bigcup_{\ell=1}^{N} I_{k_\ell}.$$

Wir können annehmen, dass $0 \in I_{k_1}$ und $1 \in I_{k_N}$. Für jede ganze Zahl $1 \leq \ell \leq N$ bezeichne $b_{k_\ell} = \sup(I_{k_\ell})$. Für jedes $b \in \{b_{k_1}, \ldots, b_{k_N}\}$ sei $f(b) \in \{k_1, \ldots, k_N\}$ ein Index, so dass

$$b \in I_{f(b)}.$$

Beachte $f(b_{k_\ell}) = k_\ell$ kann nur gelten, falls $b_{k_\ell} = 1$. Wir definieren die Punkte x_k rekursiv wie folgt:

$$x_0 = 0, x_1 = b_{k_1} \text{ und } \quad x_{k+1} := b_{f(x_k)}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Nach Konstruktion gilt $x_k \leq x_{k+1}$. Es sei $r \geq 1$ die kleinste ganze Zahl, so dass $x_r = 1$. Es muss gelten $1 \leq r \leq N$ und die Punkte $x_0, \ldots, x_r$ sind alle paarweise verschieden. Somit sind auch die Indizes $f(x_1), \ldots, f(x_r)$ alle verschieden und es gilt

$$
\begin{aligned}
&d(\gamma(0), \gamma(1)) \leq \sum_{k=1}^{r} d(\gamma(x_{k-1}), \gamma(x_k)) \\
&\leq d(\gamma(0), \gamma(M_{k_1})) + d(\gamma(M_{k_1}), \gamma(x_1)) + \left(\sum_{k=1}^{r-1} d(\gamma(x_k), \gamma(M_{f(x_k)})) + d(\gamma(M_{f(x_k)}), \gamma(x_{k+1})) \right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2^{k_1}} + \mathsf{diam}(C_{k_1}) + \frac{\varepsilon}{2^{k_1}} + \left(\sum_{k=1}^{r-1} \frac{\varepsilon}{2^{f(x_k)}} + \mathsf{diam}(C_{f(x_k)}) + \frac{\varepsilon}{2^{f(x_k)}} \right) \\
&\leq 2\varepsilon + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathsf{diam}(C_k) \leq \mathcal{H}^1(K) + 3\varepsilon,
\end{aligned}
$$

und somit

$$d(\gamma(0), \gamma(1)) \leq \mathcal{H}^1(K).$$

wie gewünscht.

2. *(Beweis der Gleichheit)* Mittels (1) lässt sich die Gleichheit $\mathcal{H}^1\big(\gamma\left([0,1]\right)\big) = L(\gamma)$ nun leicht zeigen. Weil $\mathcal{H}^1(\{p\}) = 0$ für alle Punkte $x \in X$ und die Mengen $\gamma([a,b]) \subset X$ Borelmengen sind für alle $0 \leq a \leq b \leq 1$, folgt für alle Partitionen $0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_N$

$$\sum_{i=1}^{N} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \leq \sum_{i=1}^{N} \mathcal{H}^1\left(\gamma\big([t_{i-1}, t_i]\big)\right) = \mathcal{H}^1(\gamma\left([0,1]\right))$$

und somit $L(\gamma) \leq \mathcal{H}^1(\gamma\left([0,1]\right))$. Es sei $\varepsilon > 0$. Es gilt

$$\mathcal{H}^1_\varepsilon \leq \sum_{k=1}^{n} \mathsf{diam}\left(\gamma(\,[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}])\right),$$

wobei $\frac{1}{n} < \delta(\varepsilon)$. Weil $\mathsf{diam}\left(\gamma(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right])\right) = d(\gamma(a_k), \gamma(b_k))$ mit $a_k \leq b_k$ folgt

$$\left(\sum_{k=1}^{n} d\left(\gamma(\frac{k-1}{n}), \gamma(a_k)\right) + d(\gamma(a_k), \gamma(b_k)) + d\left(\gamma(b_k), \gamma(\frac{k}{n})\right) \right) \leq L^1(\gamma).$$

Womit die Gleichheit $\mathcal{H}^1\big(\gamma\left([0,1]\right)\big) = L(\gamma)$ nun bewiesen ist.

3. Es bezeichne $C \subset [0,1]$ die allgemeine Cantormenge aus Aufgabe 4, Serie 5. Berechne die Hausdorff-Dimension der allgemeinen Cantormenge in Abhängigkeit der γ_k.

Lösung: Falls C nicht die klassische $\frac{1}{3}$-Cantormenge ist, hat C positives Lebesgue Mass. (Siehe Serie 5, Aufgabe 4). Nach Satz 3.15 (3) im Skript gibt es eine Konstante $c > 0$ so dass $\mathcal{H}^1 = c\nu$ wobei ν das äussere Lebesgue-Mass bezeichnet. Es gilt somit $\mathcal{H}^1(C) = c\nu(C) > 0$ und deshalb ist die Hausdorff-Dimension von C gleich eins, *falls* C nicht die klassische Cantormenge ist. Es sei nun $\mathcal{C}$ die klassische Cantormenge, also

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k, \qquad \text{mit } C_k = \bigcup_{\mathbf{a} \in \{0,2\}^k} I_{\mathbf{a}},$$

wobei die $I_{\mathbf{a}}$ die abgeschlossenen Intervalle der jeweiligen Iterations-Stufe bezeichnen. Beachte $\mathsf{diam}(I_{\mathbf{a}}) = 3^{-k}$ falls $\mathbf{a} \in \{0,2\}^k$. Es gilt somit für alle $\delta \geq 3^{-k}$:

$$\mathcal{H}^s_\delta \leq \sum_{\mathbf{a} \in \{0,2\}^k} \mathsf{diam}(I_{\mathbf{a}})^s = \left(\frac{2}{3^s}\right)^k.$$

Falls $s > \log_3(2)$, dann folgt dadurch $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) = 0$. Im Folgenden zeigen wir, dass $\mathcal{H}^{\log_3(2)}(\mathcal{C}) > 0$. Dies impliziert dann, dass die Hausdorff-Dimension von $\mathcal{C}$ gleich $\log_3(2)$ ist. Es sei $\varepsilon > 0$, $\delta := 3^{-k_0}$ und

$$\mathcal{C} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k, \text{ mit } \mathsf{diam}(E_k) \leq \delta \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \mathsf{diam}(E_k)^{\log_3(2)} \leq \mathcal{H}^{\log_3(2)}_\delta(\mathcal{C}) + \varepsilon.$$

Weil $\mathsf{diam}(E_k) \leq 3^{-k_0}$ existiert für jedes E_k ein eindeutiges $I_{\mathbf{a}}$, wobei $\mathbf{a} \in \{0,2\}^{k_0}$, so dass $E_k \subset I_{\mathbf{a}}$. Es bezeichne für jedes $\mathbf{a} \in \{0,2\}^{k_0}$ die Menge $\mathcal{J}_{\mathbf{a}}$ die Menge aller Indizes $k \geq 1$ so dass $E_k \subset I_{\mathbf{a}}$. Es sei $\mathsf{diam}(E_k) = |a_k - b_k|$ für alle $k \geq 1$. Es gilt

$$I_{\mathbf{a}} = \bigcup_{k \in \mathcal{J}_{\mathbf{a}}} [a_k, b_k]$$

für alle $\mathbf{a} \in \{0,2\}^{k_0}$ und somit

$$\mathsf{diam}(I_{\mathbf{a}}) \leq \sum_{k \in \mathcal{J}_{\mathbf{a}}} \mathsf{diam}(E_k).$$

Wir wissen aus der Analysis, dass $(a+b)^\varepsilon \leq a^\varepsilon + b^\varepsilon$ für alle $a, b \geq 0$ und $\varepsilon \in [0,1]$, deshalb folgt für $s_\star := \log_3(2) < 1$, dass

$$1 = \sum_{a \in \{0,2\}^{k_0}} \mathsf{diam}(I_{\mathbf{a}})^{s_\star} \leq \sum_{a \in \{0,2\}^{k_0}} \sum_{k \in \mathcal{J}_{\mathbf{a}}} \mathsf{diam}(E_k)^{s_\star} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathsf{diam}(E_k)^{s_\star} \leq \mathcal{H}^{s_\star}_\delta(\mathcal{C}) + \varepsilon$$

und somit

$$1 = \mathcal{H}^{\log_3(2)}_{3^{-k_0}}(\mathcal{C}), \qquad \text{also } \mathcal{H}^{\log_3(2)}(\mathcal{C}) = 1.$$

Die Hausdorff-Dimension der klassischen Cantor-Menge $\mathcal{C}$ ist deswegen gleich $\log_3(2)$.

4.* Berechne die Hausdorff-Dimension der Koch-Kurve, des Sierpiński-Dreiecks und des Sierpiński-Teppichs.