Serie 7

Abgabetermin: *Mittwoch, 18.04.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Es sei μ ein Radonmass auf einem kompakten Hausdorffraum X mit $\mu(X) = 1$. Zeige: Es existiert eine kompakte Teilmenge $K_\mu \subset X$ so dass

1. $\mu(K_\mu) = 1$ und
2. für alle kompakten echten Teilmengen $L \subset K_\mu$ gilt $\mu(L) < \mu(K_\mu)$.

Die Menge K_μ heisst *Träger* von μ.

2. Beweise den **Satz von Egoroff:**

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Massraum und $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reellwertiger messbarer Funktionen auf X, welche punktweise gegen $f\colon X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine messbare Menge $E \subset X$ mit $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$, so dass die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ auf E gleichmässig gegen f konvergiert.

3. Es sei μ ein Radonmass auf einem lokal-kompakten Hausdorff-Raum X und f eine reellwertige messbare Funktion auf X. Es sei $A \subset X$ eine messbare Teilmenge so dass $\mu(A) < +\infty$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in X \setminus A$. Zeige: Dann existiert eine Folge $(g_n)_{n\geq 1}$ mit $g_n \in C_c(X)$ und $g_n \to f$ punktweise mit $n \to +\infty$ fast überall.

4. Konstruiere eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$, welche die Voraussetzungen des Satzes von Lusin (Satz 4.6 im Skript) erfüllt, so dass keine Funktion $g \in C_c(X)$ existiert, die

$$\mu\left(\left\{x \in X : f(x) \neq g(x)\right\}\right) = 0$$

erfüllt (anstelle von "$< \varepsilon$" für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$).