

Serie 7 - Lösung

Abgabetermin: *Mittwoch, 18.04.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: <https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/>

1. Es sei μ ein Radonmass auf einem kompakten Hausdorffraum X mit $\mu(X) = 1$. Zeige: Es existiert eine kompakte Teilmenge $K_\mu \subset X$ so dass

1. $\mu(K_\mu) = 1$ und
2. für alle kompakten echten Teilmengen $L \subset K_\mu$ gilt $\mu(L) < \mu(K_\mu)$.

Die Menge K_μ heisst *Träger* von μ .

Lösung: Wir definieren

$$K_\mu := \{x \in X : \text{für alle offenen Mengen } U \subset X \text{ mit } x \in U \text{ gilt } \mu(U) > 0\}.$$

Die Menge K_μ ist abgeschlossen, weil falls $x \notin K_\mu$ gibt es eine offene Menge $U_x \subset X$ mit $x \in U_x$ so dass $\mu(U_x) = 0$ und deshalb folgt für alle $y \in U_x$, dass $y \in K_\mu^c$.

Im Folgenden zeigen wir, dass $\mu(L) = \mu(K \cap L)$ für alle kompakten Teilmengen $L \subset X$. Es genügt zu zeigen, dass $\mu(L \cap K_\mu^c) = 0$. Beachte, dass $(U_x)_{x \in L \cap K_\mu^c}$ eine offene Überdeckung von $A := L \cap K_\mu^c$ ist. Es sei $\varepsilon > 0$, nach Satz 4.3 (1) gibt es eine kompakte Menge $C_\varepsilon \subset X$ so dass $C_\varepsilon \subset A$ und $\mu(A \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$. Weil C_ε kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(U_{x_k})_{1 \leq k \leq N}$ mit $C_\varepsilon \subset \bigcup_{k=1}^N U_{x_k}$. Somit

$$\mu(C_\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^N \mu(U_{x_k}) = 0,$$

also

$$\mu(A) = \mu(C_\varepsilon) + \mu(A \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Wir haben also gezeigt, $\mu(L \cap K_\mu^c) = 0$ wie behauptet.

Somit $1 = \mu(X) = \mu(K_\mu \cap X) = \mu(K_\mu)$. Falls $L \subset K_\mu$ eine echte kompakte Teilmenge ist, gibt es einen Punkt $x \in K_\mu$ so dass $x \notin L$, und da X als kompakter Hausdorff-Raum ein normaler topologischer Raum ist, gibt es eine offene Menge $U \subset X$ so dass $x \in U$ und $L \cap U = \emptyset$. Weil $x \in K_\mu$ gilt $\mu(U) > 0$. Wir berechnen

$$\mu(L) = \mu(K_\mu \cap L) < \mu(K_\mu \cap L) + \mu(U) = \mu(K_\mu \cap L) + \mu(K_\mu \cap U) \leq \mu(K_\mu),$$

wie gefordert.

Bitte wenden!

2. Beweise den **Satz von Egoroff**:

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Massraum und $(f_n)_{n \geq 1}$ eine Folge reellwertiger messbarer Funktionen auf X , welche punktweise gegen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine messbare Menge $E \subset X$ mit $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$, so dass die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ auf E gleichmässig gegen f konvergiert.

Lösung: Wir unterteilen den Beweis in zwei Teile. Zuerst beweisen wir eine Hilfsaussage und danach verwenden wir die Hilfsaussage um den Satz von Egoroff zu beweisen.

1. (*Hilfsaussage*) Es sei $E \subset X$ eine messbare Teilmenge und $\varepsilon > 0$. Für jedes $\delta \in (0, \mu(E))$ existiert eine Menge $A := A(E, \varepsilon, \delta)$ und eine ganze Zahl $N := N(A)$ so dass $A \subset E$ mit $\mu(E \setminus A) < \delta$ und

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Im Folgenden beweisen wir diese Hilfsaussage. Wir definieren

$$E_n := \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } k \geq n\}.$$

Es gilt

$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \quad \text{und} \quad E = \bigcap_{n \geq 1} A_n,$$

wobei $A_k = E_k \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_{k-1})$. Somit

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n),$$

es gibt also ein $N \geq 1$ so dass

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \mu(A_k) < \delta.$$

Wir definieren $A := \bigcup_{k=1}^N A_k$, weil $A_k \subset E_k$ gilt für alle $n \geq N$, dass

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Die Menge A hat also die geforderten Eigenschaften.

2. (*Beweis Satz von Egoroff*) Sei $\varepsilon > 0$. Wir definieren die Folge E_n für $n \geq 1$ wie folgt:

$$E_1 := X, \quad E_{n+1} := A\left(E_n, \frac{\varepsilon}{2^n}, \frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Wir setzen

$$E := \bigcap_{n \geq 1} E_n.$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir berechnen

$$\mu(X \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n \setminus E_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Auf dieser Menge konvergiert die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ gleichmässig gegen f : Falls $\varepsilon' > 0$ ist, existiert eine ganze Zahl $n_0 \geq 1$, so dass $\frac{\varepsilon}{2^{n_0}} < \varepsilon'$ und da $E \subset E_{n_0}$ gilt,

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2^{n_0}} < \varepsilon' \quad \text{für alle } n \geq N(E_{n_0}).$$

3. Es sei μ ein Radonmass auf einem lokal-kompakten Hausdorff-Raum X und f eine reellwertige messbare Funktion auf X . Es sei $A \subset X$ eine messbare Teilmenge so dass $\mu(A) < +\infty$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in X \setminus A$. Zeige: Dann existiert eine Folge $(g_n)_{n \geq 1}$ mit $g_n \in C_c(X)$ und $g_n \rightarrow f$ punktweise mit $n \rightarrow +\infty$ fast überall.

Lösung: Für jedes $n \geq 1$ sei $g_n \in C_c(X)$ eine Funktion so dass

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g_n(x)\}) < \frac{1}{2^n};$$

solch eine Funktion existiert aufgrund des Satzes von Lusin. Wir definieren $E_n := \{x \in X : f(x) \neq g_n(x)\}$ und

$$E := \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} E_k.$$

Beachte, dass wenn $g_n(x)$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert mit $n \rightarrow +\infty$, dann gilt $x \in E$. Nach Konstruktion hat E Mass Null und deshalb konvergiert die Folge $(g_n)_{n \geq 1}$ punktweise mit $n \rightarrow +\infty$ fast überall nach f .

4. Konstruiere eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, welche die Voraussetzungen des Satzes von Lusin (Satz 4.6 im Skript) erfüllt, so dass keine Funktion $g \in C_c(X)$ existiert, die

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

erfüllt (anstelle von " $< \varepsilon$ " für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$).

Lösung: Es sei $X := [0, 1]$ und μ das Lebesgue-Mass auf X . Wir definieren $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mittels $f(x) = 1$ falls $1/2 < x \leq 1$ und $f(x) = 0$ sonst. Es sei $g \in C_c(X)$ eine Funktion mit kompaktem Träger. Es gilt

$$\mu(\{x \in X : f(x) = g(x)\}) \leq \mu(\{x \in X : g(x) = 0\}) + \mu(\{x : g(x) = 1\}).$$

Weiter gilt,

$$\mu(\{x \in X : g(x) \in (0, 1)\}) = \mu(g^{-1}((0, 1))) > 0,$$

da die Menge $g^{-1}((0, 1)) \subset X$ offen und aufgrund des Zwischenwertsatzes *nicht-leer* ist. Deshalb gilt

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) \geq \mu(\{x \in X : g(x) \in (0, 1)\}) > 0,$$

was zu zeigen war.