Serie 8

Abgabetermin: *Mittwoch, 25.04.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Es sei μ ein Mass auf einem Massraum Ω. Wir sagen eine Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ von reellen messbaren Funktionen auf Ω konvergiere *im Mass* gegen die reelle messbare Funktion f, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon\right\}\right) \to 0 \text{ mit } n \to +\infty.$$

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass $\mu(\Omega) < +\infty$. Beweise:

a) Falls $f_n(\omega) \to f(\omega)$ fast überall, dann $f_n \to f$ im Mass.

b) Falls $f_n \to f$ im Mass, dann existiert eine Teilfolge von $(f_n)_{n\geq 1}$, welche fast überall punktweise gegen f konvergiert.

2. Es bezeichne λ das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}$. Finde jeweils eine Folge messbarer Funktionen $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass

a) $f_n \to 0$ gleichmässig, aber nicht in $L^1(\lambda)$.

b) $f_n \to 0$ punktweise und im Mass, aber nicht in $L^1(\lambda)$ und auch nicht gleichmässig.

c) $f_n \to 0$ punktweise, aber nicht im Mass.

d) $f_n(x)$ divergiert für alle $x \in (0,1)$, aber trotzdem $f_n \to 0$ im Mass.

3. Beweise folgende Umkehrung der Jensenschen Ungleichung: Sei $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(x))\,dx,$$

für alle beschränkten messbaren $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist φ konvex.

4. Diskutiere den Gleichheitsfall in der Minkowski-Ungleichung (Satz 5.3 (2) im Skript).