Serie 8

Abgabetermin: *Mittwoch, 25.04.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Es sei μ ein Mass auf einem Massraum Ω. Wir sagen eine Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ von reellen messbaren Funktionen auf Ω konvergiere *im Mass* gegen die reelle messbare Funktion f, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon\right\}\right) \to 0 \text{ mit } n \to +\infty.$$

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass $\mu(\Omega) < +\infty$. Beweise:

a) Falls $f_n(\omega) \to f(\omega)$ fast überall, dann $f_n \to f$ im Mass.

b) Falls $f_n \to f$ im Mass, dann existiert eine Teilfolge von $(f_n)_{n\geq 1}$, welche fast überall punktweise gegen f konvergiert.

Lösung:

a) Es existiert eine Menge $A \subset \Omega$ mit $\mu(A) = \mu(\Omega)$, so dass $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in A$. Es gilt

$$A = \bigcup_{N=1}^{+\infty} A_N, \text{ wobei } A_N := \left\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N\right\}.$$

Somit $\mu(A_N) \to \mu(A) = \mu(\Omega)$ mit $N \to +\infty$, also insbesonders $\mu(A_N^c) \to 0$ mit $N \to +\infty$. Definiere

$$B_N := \left\{\omega \in \Omega : |f_N(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon\right\}.$$

Beachte, dass gilt $B_N \subset A_N^c$. Somit haben wir gezeigt $\mu(B_N) \to 0$ mit $N \to +\infty$ wie gewüsncht.

b) Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle rekursiv eine Folge $n_k \geq 1$ so dass $n_k \geq n_{k-1}$ und

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega : |f_{n_k}(\omega) - f(\omega)| > 1/k\right\}\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Es sei $A_k := \left\{\omega \in \Omega : |f_{n_k}(\omega) - f(\omega)| > 1/k\right\}^c$. Somit gilt

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{\ell=k}^{+\infty} A_\ell^c\right) \leq \lim_{k\to+\infty}\sum_{\ell=k}^{+\infty}\frac{1}{\ell^2} = 0$$

Bitte wenden!

und deshalb

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcap_{\ell=k}^{+\infty}A_\ell\right)=1.$$

Beachte, falls $x\in\bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcap_{\ell=k}^{+\infty}A_\ell$, dann gilt $f_{n_k}(x)\to f(x)$ mit $k\to+\infty$. Die Teilfolge f_{n_k} konvergiert also fast sicher gegen f, was zu zeigen war.

2. Es bezeichne λ das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}$. Finde jeweils eine Folge messbarer Funktionen $f_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ so dass

a) $f_n\to 0$ gleichmässig, aber nicht in $L^1(\lambda)$.

b) $f_n\to 0$ punktweise und im Mass, aber nicht in $L^1(\lambda)$ und auch nicht gleichmässig.

c) $f_n\to 0$ punktweise, aber nicht im Mass.

d) $f_n(x)$ divergiert für alle $x\in(0,1)$, aber trotzdem $f_n\to 0$ im Mass.

Lösung:

a) Wir definieren für alle $n\geq 1$

$$f_n(x):=\begin{cases}\frac{1}{n} & x\in(0,n^2)\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Es gilt $f_n\to 0$ gleichmässig, da $|f_n(x)|<\frac{1}{N}$ für alle $n\geq N$ und $x\in\mathbb{R}$. Weiters gilt für alle $n\geq 1$, dass

$$\|f_n\|_1=n.$$

Somit konvergiert f_n nicht in $L^1(\lambda)$ gegen die Nullfunktion.

b) Wir definieren für alle $n\geq 1$

$$f_n(x):=\begin{cases}n & x\in(0,\frac{1}{n})\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Es gilt $f_n\to 0$ punktweise und da für alle $\varepsilon>0$ gilt

$$\lambda\left(\left\{x\in\mathbb{R}:|f_n(x)|>\varepsilon\right\}\right)\leq\frac{1}{n},$$

konvergiert die Folge f_n auch im Mass gegen die Nullfunktion. Wir berechnen

$$\|f_n\|_1=1\quad n\geq 1,$$

somit konvergiert die Folge f_n nicht in $L^1(\lambda)$ gegen die Nullfunktion. Weil

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|=\lim_{n\to+\infty}n=+\infty,$$

konvergiert die Folge f_n nicht gleichmässig gegen die Nullfunktion.

Siehe nächstes Blatt!

c) Wir definieren für alle $n \geq 1$

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & x \in (n, n+1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Folge f_n konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion, da $f_N(x) = 0$ für alle $N \geq 1$ mit $N > |x|$. Da für alle $n \geq 1$ gilt

$$\mu\left(x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| > \frac{1}{2}\right) = 1,$$

konvergiert die Funktionenfolge f_n nicht im Mass gegen die Nullfunktion.

d) Es sei $a_1 := 1$ und $a_n := a_{n-1} + n$. Definiere $f_1 := \chi_{[0,1]}$ und für $k := a_{n-1} + \ell$, wobei $n \geq 2$ und $1 \leq \ell \leq n$, definiere

$$f_k := n\chi_{[\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}]} + \frac{1}{n}\chi_{[0,1]}.$$

Beachte, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{k \to +\infty} \mu\left(\{x \in \mathbb{R} : |f_k(x)| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

Die Funktionenfolge f_k konvergiert also im Mass zu der Nullfunktion. Es sei $x \in [0,1]$. Für jedes $n \geq 1$ existiert ein $1 \leq \ell \leq n$ so dass $x \in [\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}]$. Also $f_{a_{n-1}+\ell}(x) \geq n$, und deshalb divergiert die Folge $f_k(x)$ für jedes $x \in [0,1]$.

3. Beweise folgende Umkehrung der Jensenschen Ungleichung: Sei $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(x))\,dx,$$

für alle beschränkten messbaren $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist φ konvex.

Lösung: Es sei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in [0,1]$. Wir definieren $f = x_1\chi_{[0,\lambda]} + x_2\chi_{[\lambda,1]}$. Die Funktion f ist als Summe beschränkter messbarer Funktionen ebenfalls messbar und beschränkt. Es gilt somit

$$\varphi((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) = \varphi\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(x))\,dx = (1-\lambda)\varphi(x_1) + \lambda\varphi(x_2),$$

und deshalb ist φ konvex.

4. Diskutiere den Gleichheitsfall in der Minkowski-Ungleichung (Satz 5.3 (2) im Skript).

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\int_X f(f+g)^{p-1}\,d\mu &\le \|f\|_p \left(\int_X (f+g)^p\right)^{\frac{1}{q}} \\ \int_X g(f+g)^{p-1}\,d\mu &\le \|g\|_p \left(\int_X (f+g)^p\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{1}$$

und somit

$$\int_X (f+g)^p\,d\mu \le (\|f\|_p + \|g\|_p)\left(\int_X (f+g)^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Falls also $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$, folgt

$$\int_X (f+g)^p\,d\mu \le \int_X (f+g)^p\,d\mu;$$

deshalb sind die Ungleichungen in (1) nicht strikt und es gilt

$$\begin{aligned}\int_X f(f+g)^{p-1}\,d\mu &= \|f\|_p \left(\int_X (f+g)^p\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_q \\ \int_X g(f+g)^{p-1}\,d\mu &= \|g\|_p \left(\int_X (f+g)^p\right)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_q.\end{aligned}$$

Es gilt also Gleichhheit für die Höldersche Ungleichung in beiden Fällen. Es gibt somit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nicht beide Null, so dass $\alpha f^p = \beta(f+g)^p$ fast überall und es gibt somit Konstanten $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ nicht beide Null, so dass $\alpha' g^p = \beta'(f+g)^p$ fast überall (siehe Skript Seite 40). Beachte, dass falls $\beta = \beta' = 0$, dann gilt $f^p = \frac{\alpha'}{\alpha} g^p$. Es gibt in diesem Fall eine Konstante $\lambda \ge 0$ so dass $\lambda f^p = g^p$. Es sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\beta \neq 0$. Es gilt

$$\alpha' g^p = \frac{\beta'}{\beta}\beta(f+g)^p = \frac{\beta'}{\beta}\alpha f^p.$$

Falls also $\alpha' \neq 0$, dann gibt es eine Konstante $\lambda \ge 0$ such that $g^p = \lambda f^p$. Nehme nun an $\alpha' = 0$, dann gilt $(f+g)^p = 0$, da $f+g \ge 0$, folgt $f+g=0$ und da $f \ge 0$ und $g \ge 0$, erhalten wir $f = g = 0$. Insbesonders gibt es auch in diesem Fall eine Konstante $\lambda \ge 0$ so dass $\lambda f^p = g^p$. Wir haben alle möglichen Fälle betrachtet.

Wir haben also gezeigt, es gilt Gleichheit in der Minkowskischen Ungleichung genau dann wenn es eine Konstante $\lambda \ge 0$ gibt, so dass $\lambda f^p = g^p$ fast überall gilt.