Serie 9

Abgabetermin: *Mittwoch, 02.05.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Zeige: Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Massraum. Dann gilt $L^s(\mu) \subset L^r(\mu)$ für alle $1 \leq r < s \leq +\infty$.

2. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$. Zeige: Aus $f \in L^{p_1}(\mu) \cap L^{p_2}(\mu)$ folgt $f \in L^p(\mu)$ für alle $p \in [p_1, p_2]$.

3. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum.

a) Ein $f \in \bigcap_{n \geq 1} L^n(\mu)$ mit

$$\sup\left\{\|f\|_n : n \geq 1\right\} < +\infty$$

liegt in $L^\infty(\mu)$.

b) Falls $\mu(X) < +\infty$, so gilt für ein f wie in **a)**, dass $\|f\|_\infty = \lim_{n \to +\infty} \|f\|_n$.

c) Finde eine Gegenbeispiel zu der Aussage in Teil **a)**, wenn die Voraussetzung

$$\sup\left\{\|f\|_n : n \geq 1\right\} < +\infty$$

weggelassen wird.

4. **(ℓ^p Räume)** Es sei $\ell^p := L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_\mathbb{N})$, wobei $1 \leq p \leq +\infty$ und $\mu_\mathbb{N}$ das Zählmass bezeichnet.

a) Zeige $\ell^p \subset \ell^q$ für $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

b) Zeige für $x \in \ell^p$, $1 \leq p < +\infty$ die Konvergenz $\|x\|_n \to \|x\|_\infty$ mit $n \to +\infty$.

c)* Es bezeichne δ_{kn} das Kronecker-Delta. Zeige: Die Elemente $e_n := (\delta_{kn})_{k \geq 1}$ spannen einen dichten Unterraum von ℓ^p falls $1 \leq p < +\infty$. Diskutiere auch den Fall $p = +\infty$.