Lösung - Serie 9

Abgabetermin: *Mittwoch, 02.05.2018* in die Fächli im HG F 28.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/`

---

1. Zeige: Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Massraum. Dann gilt $L^s(\mu) \subset L^r(\mu)$ für alle $1 \leq r < s \leq +\infty$.

Lösung: Definiere $p = \frac{s}{r}$, beachte, dass $p \in (1, +\infty]$. Es sei q der zu p konjugierte Exponent. Mittels der Hölderschen Ungleichung erhalten wir

$$\int_X |f|^r \, d\mu = \int_X |f|^r \cdot 1 \, d\mu \leq \|f^r\|_p \|1\|_q = \|f\|_s^r \mu(X),$$

und deshalb $\|f\|_r < +\infty$.

2. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$. Zeige: Aus $f \in L^{p_1}(\mu) \cap L^{p_2}(\mu)$ folgt $f \in L^p(\mu)$ für alle $p \in [p_1, p_2]$.

Lösung: Es sei $\alpha \in [0, 1]$ und wir definieren

$$r(\alpha) = \frac{p_1 p_2}{(1-\alpha)p_1 + \alpha p_2}.$$

Falls $p_2 = +\infty$ gilt ist $r(\alpha) = \frac{p_1}{\alpha}$. Mittels der Hölderschen Ungleichung erhalten wir

$$\|f\|_{r(\alpha)} \leq \|f\|_{p_1}^{1-\alpha} \|f\|_{p_2}^{\alpha}.$$

Beachte, $r(0) = p_2$ und $r(1) = p_1$, somit folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass für jedes $p \in [p_1, p_2]$ ein α_p existiert, so dass $r(\alpha_p) = p$. Wir haben also gezeigt,

$$\|f\|_p = \|f\|_{r(\alpha_p)} \leq \|f\|_{p_1}^{1-\alpha_p} \|f\|_{p_2}^{\alpha_p} < +\infty,$$

wie gewünscht.

Bitte wenden!

3. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum.

a) Ein $f \in \bigcap_{n \geq 1} L^n(\mu)$ mit

$$\sup\left\{\|f\|_n : n \geq 1\right\} < +\infty$$

liegt in $L^\infty(\mu)$.

b) Falls $\mu(X) < +\infty$, so gilt für ein f wie in **a)**, dass $\|f\|_\infty = \lim_{n \to +\infty} \|f\|_n$.

c) Finde eine Gegenbeispiel zu der Aussage in Teil **a)**, wenn die Voraussetzung

$$\sup\left\{\|f\|_n : n \geq 1\right\} < +\infty$$

weggelassen wird.

Lösung:

a) Es sei $\Lambda > \sup\left\{\|f\|_n : n \geq 1\right\}$ definiere $A_\Lambda := \{x \in X : |f(x)| > \Lambda\}$. Beachte

$$\|f\|_n^n \geq \int_{A_n} |f|^n \geq \Lambda^n \mu(A_\Lambda).$$

also ebenfalls

$$\sup\left\{\|f\|_n : n \geq 1\right\} \geq \Lambda\mu(\lambda),$$

und somit da $\Lambda > \sup\left\{\|f\|_n : n \geq 1\right\}$ folgt $\mu(A_\Lambda) = 0$ und deshalb $f \in L^\infty(\mu)$.

b) Es gilt

$$\int_X |f|^n \leq \|f\|_\infty^n \mu(X),$$

also

$$\limsup_{n \to +\infty} \|f\|_n \leq \|f\|_\infty.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ und definiere $A_\varepsilon := \{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$. Beachte

$$\|f\|_n^n \geq \int_{A_n} |f|^n \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)^n \mu(A_n),$$

also ebenfalls

$$\liminf_{n \to +\infty} \|f\|_n \geq \|f\|_\infty.$$

Somit folgt die gewünschte Gleichheit.

c) Es sei $X = [0, 1]$ das Einheitsintervall und $\mu = \lambda$ das Lebesgue Mass. Die Funktion $f(x) := \log(x)$, liegt in $L^n(\lambda)$ für alle $n \geq 1$, aber $f \notin L^\infty(\lambda)$. Dies folgt, weil

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = \int_0^1 |\log(u)|^n\, du,$$

wobei wir die Variablentransformation $t = -log(u)$ vorgenommen haben.

Siehe nächstes Blatt!

4. **(ℓ^p Räume)** Es sei $\ell^p := L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_{\mathbb{N}})$, wobei $1 \leq p \leq +\infty$ und $\mu_{\mathbb{N}}$ das Zählmass bezeichnet.

a) Zeige $\ell^p \subset \ell^q$ für $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

b) Zeige für $x \in \ell^p$, $1 \leq p < +\infty$ die Konvergenz $\|x\|_n \to \|x\|_\infty$ mit $n \to +\infty$.

c)* Es bezeichne δ_{kn} das Kronecker-Delta. Zeige: Die Elemente $e_n := (\delta_{kn})_{k\geq 1}$ spannen einen dichten Unterraum von ℓ^p falls $1 \leq p < +\infty$. Diskutiere auch den Fall $p = +\infty$.

Lösung:

a) Es sei $x := (x_i)_{i\geq 1}$ und $x \in \ell^p$. Weil $\|x\|_p < +\infty$, folgt sofort $C := \sup_{i\geq 1}|x_i| < +\infty$. Also insbesondere $\|x\|_\infty < +\infty$. Wir haben also gezeigt, dass $\ell^p \subset \ell^\infty$. Es sei nun $q < +\infty$. Definiere $\varepsilon = q - p$. Beachte $q = p + \varepsilon$ und $\varepsilon < +\infty$. Wir berechnen

$$\|x\|_q^q = \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^q = \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^\varepsilon |x_i|^p \leq C^\varepsilon \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p = C^\varepsilon \|x\|_p^p.$$

b) Wir wissen aus Teilaufgabe **a)** bereits

$$\|x\|_\infty \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x\|_p.$$

Andererseits gilt für $q < n$ mittels Hölder

$$\|x\|_n^n \leq \|f\|_\infty^{n-q} \|f\|_q^q$$

und somit

$$\|x\|_n \leq \|f\|_\infty^{1-\frac{q}{n}} \|f\|_q^{\frac{q}{n}}.$$

Also

$$\limsup_{n\to+\infty} \|x\|_n \leq \|f\|_\infty.$$

Fasst man alles zusammen folgt die Aussage.

c)