Musterlösung 1

1.

$$
\begin{aligned}
D_1 &= A \cup B \cup C\\
D_2 &= ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))^c = (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c) \cap (B^c \cup C^c)\\
D_3 &= D_1^c = (A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c\\
D_4 &= (A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c\\
D_5 &= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)\\
D_6 &= A^c \cup (B^c \cap C^c) = (A \cap (B \cup C))^c\\
D_7 &= (A^c \cap B)^c = A \cup B^c\\
D_8 &= (D_7 \cap B^c)^c = (A \cup B^c)^c \cup B = (A^c \cap B) \cup B = B
\end{aligned}
$$

2. Wir wählen als Grundraum

$$\Omega = \{(r,g) :\ r,g \in \{1,2,3,4,5,6\}\} = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}^2$$

die Menge aller Paare der Zahlen von 1 bis 6. Die erste Komponente r steht für die Augenzahl des roten Würfels, die zweite Komponente g für die des grünen.
Bemerkung: Bei diesem Ω haben alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit $1/36$, sofern es sich um faire Würfel handelt.
Es sind

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2)\},\\
W_2 &= \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (6,6)\}\\
&= \text{„Beide Würfel zeigen die gleiche Zahl.“}\\
W_3 &= \{(2,1),\ (4,2),\ (6,3)\}\\
W_4 &= \{(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ (4,5),\ (5,6),\\
&\quad (2,1),\ (3,2),\ (4,3),\ (5,4),\ (6,5)\}\\
&= \text{„Die beiden gewürfelten Zahlen unterscheiden sich um 1.“}\\
W_5 &= \{(1,6),\ (2,6),\ (3,6),\ (4,6),\ (5,6),\\
&\quad (6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\}\\
&= \text{„Mindestens ein Würfel zeigt eine 6.“}
\end{aligned}
$$

Ein Farbenblinder könnte nicht in jedem Fall entscheiden, ob das Ereignis W_3 eingetreten ist, da es in diesem Fall wichtig ist, dass man die beiden Würfel unterscheiden kann. Bei allen anderen genannten Ereignissen ist dies nicht nötig.

3. a) Die folgenden Berechnungen verwenden wiederholt die Tatsache $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= np \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^j(1-p)^{n-1-j}}_{=1 \text{ (Summe aller W'keiten einer Bin}(n-1,p)\text{-Vert.)}} = np \end{aligned}$$

$X \sim \mathrm{Hyp}(N, K, n)$:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^{n} k\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{\left(\frac{K}{k}\binom{K-1}{k-1}\right)\overbrace{\binom{N-K}{n-k}}^{=\binom{N-1-(K-1)}{n-1-(k-1)}}}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}} \\ &= n\frac{K}{N}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\binom{K-1}{j}\binom{N-1-(K-1)}{n-1-j}}{\binom{N-1}{n-1}} = n\frac{K}{N} \end{aligned}$$

b) $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$:

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^2p^{k-2}(1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) &= E[X^2-X] + E[X] - E[X]^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\ &= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) \end{aligned}$$

$X \sim \mathrm{Hyp}(N, K, n)$:

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{\left(\frac{K(K-1)}{k(k-1)}\binom{K-2}{k-2}\right)\binom{N-K}{n-k}}{\frac{N(N-1)}{n(n-1)}\binom{N-2}{n-2}} \\ &= \frac{K(K-1)}{N(N-1)}n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\frac{\binom{K-2}{k-2}\binom{N-2-(K-2)}{n-2-(k-2)}}{\binom{N-2}{n-2}} = \frac{K(K-1)n(n-1)}{N(N-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) &= E[X^2-X] + E[X] - E[X]^2 = \frac{K(K-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{nK}{N} - \frac{n^2K^2}{N^2} \\ &= \frac{NK(K-1)n(n-1) + nNK(N-1) - n^2K^2(N-1)}{N^2(N-1)} \\ &= \frac{NK^2n^2 - NKn^2 - NK^2n + NKn + nN^2K - nNK - n^2K^2N + n^2K^2}{N^2(N-1)} \\ &= \ldots = \frac{N-n}{N-1}\,n\,\frac{K}{N}\left(1-\frac{K}{N}\right) \end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} &= \frac{K!\,(N-K)!\,n!\,(N-n)!}{k!\,(K-k)!\,(n-k)!\,(N-K-(n-k))!\,N!} \\
&= \binom{n}{k}\frac{K(K-1)\cdot\ldots\cdot(K-k+1)}{N(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-k+1)} \\
&\qquad \cdot\frac{(N-K)(N-K-1)\cdot\ldots\cdot(N-K-(n-k)+1)}{(N-k)(N-k-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)} \\
&= \binom{n}{k}\underbrace{\underbrace{\frac{K}{N}}_{\substack{\downarrow\\p}}\underbrace{\frac{K-1}{N-1}}_{\substack{\downarrow\\p}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{K-k+1}{N-k+1}}_{\substack{\downarrow\\p}}}_{k\text{-mal}} \\
&\qquad \cdot\underbrace{\underbrace{\frac{N-K}{N-k}}_{\substack{\downarrow\\1-p}}\underbrace{\frac{N-K-1}{N-k-1}}_{\substack{\downarrow\\1-p}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{N-K-n+k+1}{N-n+1}}_{\substack{\downarrow\\1-p}}}_{(N-k)-(N-n)\text{-mal}} \\
&\to \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad (N,K\to\infty,\ K/N\to p)
\end{aligned}
$$

4. Bezeichne mit n die Gesamtanzahl der Fälle und mit m die Anzahl der günstigen Fälle. Wir möchten also

$$\frac{m}{n}$$

bestimmen.

a) Die Gesamtanzahl der Fälle ist gleich $n = N^M$. Die Anzahl m der günstigen Fälle kann auf folgende Weise ermittelt werden: Aus M Kugeln können k_1 Kugeln auf $\binom{M}{k_1}$ Arten ausgewählt werden; Aus der restlichen $M-k_1$ Kugeln können k_2 Kugeln auf $\binom{M-k_1}{k_2}$ Arten ausgewählt werden usw.; aus $M-(k_1+\cdots+k_{N-1}) = k_N$ Kugeln können k_N Kugeln auf $\binom{k_N}{k_N} = 1$ Arten ausgewählt werden. Somit ist

$$m = \frac{M!}{k_1!(M-k_1)!}\cdot\frac{(M-k_1)!}{k_2!(M-(k_1+k_2))!}\cdot\ldots\cdot\frac{(M-(k_1+\cdots+k_{N-2}))!}{k_{N-1}!k_N!} = \frac{M!}{k_1!k_2!\cdots k_N!}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich

$$\frac{m}{n} = \frac{M!}{N^M\prod_{i=1}^N k_i!}.$$

b) Gegenüber der Aufgabe **a)** erhöht sich die Anzahl der günstigen Fälle um $N!$-mal (Anzahl der Möglichkeiten, die verschiedenen Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_N$ miteinander zu permutieren). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich

$$\frac{M!N!}{N^M\prod_{i=1}^N k_i!}.$$

c) Es muss gelten

$$l_0 + l_1 + \cdots + l_M = N \quad \text{und} \quad 0 \cdot l_0 + 1 \cdot l_1 + \cdots + M \cdot l_M = M.$$

Die Gesamtanzahl der Fälle ist gleich $n = N^M$. Um die Anzahl der günstigen Fälle zu ermitteln, muss man die Anzahl der Arten, auf die man die Löcher auswählen kann, mit der Anzahl der Arten, auf die man die Kugeln auswählen kann, multiplizieren. Die Löcher kann man auf

$$\frac{N!}{l_0! l_1! \cdots l_M!} = \frac{N!}{\prod_{k=0}^{M} l_k!} \tag{1}$$

Arten auswählen. Jetzt kann man auf zwei Arten vorgehen:

1. **Art:** Die Kugeln zerfallen auf Gruppen: die Anfangsgruppe (aus 0 Kugeln ist leer); die erste Gruppe besteht aus l_1 Kugeln; allgemein besteht die k-te Gruppe aus $k \cdot l_k$ Kugeln, $k = 1, \ldots, M$. Diese Gruppen von Kugeln kann man auf

$$\frac{M!}{(1l_1)!(2l_2)! \cdots (Ml_M)!} = \frac{M!}{\prod_{k=1}^{M} (kl_k)!}$$

Arten auswählen. Wir bestimmen jetzt die Anzahl der Arten, auf die man die Kugeln innerhalb der k-ten Gruppe so einteilen kann, dass in jedem der l_k Löcher k Kugeln liegen. Diese Anzahl ist gleich

$$\frac{(kl_k)!}{k!k! \cdots k!} = \frac{(kl_k)!}{(k!)^{l_k}},$$

und die Anzahl der Arten, auf die man alle Kugeln auf alle Gruppen einteilt, ist gleich dem Produkt dieser Zahlen für alle k, d.h. $\prod_{k=1}^{M} \frac{(kl_k)!}{(k!)^{l_k}}$. Durch Multiplikation erhalten wir die Anzahl der Arten, auf die man die Kugeln auswählen kann:

$$\frac{M!}{\prod_{k=1}^{M} (kl_k)!} \frac{\prod_{k=1}^{M} (kl_k)!}{\prod_{k=1}^{M} (k!)^{l_k}} = \frac{M!}{\prod_{k=1}^{M} (k!)^{l_k}}.$$

Durch Multiplikation erhalten wir die Anzahl der günstigen Fälle:

$$m = \frac{N!}{\prod_{i=0}^{M} l_i!} \frac{M!}{\prod_{k=1}^{M} (k!)^{l_k}}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich

$$\frac{m}{n} = \frac{N! M!}{N^M \prod_{i=0}^{M} l_i! \prod_{k=1}^{M} (k!)^{l_k}}. \tag{2}$$

2. **Art:** Da wir die Anzahl von Kugeln in jedes Loch gewählt haben, können wir die Antwort aus a) benützen und $k_i = j$ setzen, wobei Loch i eines der l_j Löcher mit j Kugeln ist. Das heisst,

$$\frac{M!}{N^M \prod_{j=1}^{M} (j!)^{l_j}}.$$

Multipliziert mit (1), ergibt dies wieder (2).