Musterlösung 2

1. a) Sei X die Anzahl der Erfolge in einer Serie von gleichartigen und unabhängigen Versuchen, die jeweils nur zwei mögliche Ergebnisse haben ("Erfolg" oder "Misserfolg"). Dann heisst X Binomial verteilt, $X \sim \text{Binom}(n,p)$, mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.7$ und $n = 5$ Versuchen.

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

i) Einsetzen $k = 3$, $\mathbb{P}(X = 3) = 10 \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^2 = 0.31$,
oder in R: `dbinom(3,5,.7)`.

ii) $\mathbb{P}(X \geq 3) = \sum_{k=3}^{5} \mathbb{P}(X = k) = 0.31 + 0.36 + 0.17 = 0.84$,
oder in R: `pbinom(2,5,.7,lower.tail=FALSE)`

b) Hier kann man zwei Ansätze verwenden:

1. **Binomialverteilung:** Finde n so dass $\alpha_n := \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(X = k) < 5\%$.
(Wir benützen $\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2)$). Wir wissen schon $\alpha_5 = 16\%$. Analog berechnen wir $\alpha_6 = 7\%$, $\alpha_7 = 3\%$ (mit `pbinom(2,n,.7)`). Also man muss die Reaktion mindestens 7-mal durchführen. Der Nachteil dieses Ansatzes ist, dass man alle Summande in α_n für jedes n berechnen muss.
2. **Negative Binomialverteilung:** Sei Y der Anzahl der erfolglosen Versuche, die erforderlich sind, um in einem Bernoulli-Prozess eine vorgegebene Anzahl r von Erfolgen zu erzielen. Dann heisst Y negativ binomialverteilt, $Y \sim NB(r,p)$, mit Wahrscheinlichkeitsfunktion
$$\mathbb{P}(Y = m) = \binom{m+r-1}{m} p^r (1-p)^m$$
(Vorsicht: es gibt auch andere Versionen)
Finde m so dass $\gamma_n := \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}(Y = m) > 95\%$. Die Antwort ist dann $n + r$.
Hier $r = 3$, also berechnen wir

n	0	1	2	3	4
γ_n	.34	.65	.84	.93	.97

mit `pnbinom(n,3,.7)`.
Man könnte auch `qnbinom(.95,3,.7)` benützen um die Antwort direkt zu erhalten. Also die Antwort ist wieder 3+4 = 7. Die Vorteile dieses Ansatzes sind, dass man nur den letzten Summanden in γ_n für jedes n berechnen muss, und dass man die Wahrscheinlichkeiten erhält, nach $n + r$ Versuchen genügend Erfolge zu erzielen.

2. a) Sie erhalten neun der 36 Karten, Ihr Vater neun der restlichen 27 Karten, Ihr Bruder neun der verbleibenden 18 Karten und der vierte Mitspieler bekommt die neun übrigen Karten, d.h. es gibt

$$\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}$$

Möglichkeiten, wie die Karten verteilt werden können.

b) Der Grundraum besteht aus allen Arten, wie die Karten auf die Spieler verteilt werden können. Es ist sinvoll anzunehmen, dass alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. S_i bezeichnet nun die Menge der Karten des i-ten Spielers, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\Omega = \left\{ (S_1, S_2, S_3, S_4) \;\middle|\; \begin{array}{l} S_i \subset \{\heartsuit\text{As}, \heartsuit\text{König}, \ldots, \spadesuit 7, \spadesuit 6\},\ |S_i| = 9 \text{ für } i = 1,2,3,4; \\ \text{und } \bigcup_{i=1}^{4} S_i = \{\heartsuit\text{As}, \heartsuit\text{König}, \ldots, \spadesuit 7, \spadesuit 6\} \end{array} \right\}$$

und gemäss a) $|\Omega| = \binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}$. Das Ereignis, dass Sie sich alle "Herz" austeilen, kann durch

$$B = \Big\{(S_1, S_2, S_3, S_4) \in \Omega : \ S_1 = \{\heartsuit\text{As}, \heartsuit\text{König}, \dots, \heartsuit 7, \heartsuit 6\}\Big\}$$

beschrieben werden. Es ist klar, dass $|B| = \binom{27}{9}\binom{18}{9}$ (Wenn Sie alle "Herz" haben, dann müssen nur die restlichen 27 Karten auf Ihre drei Mitspieler verteilt werden). Daher gilt

$$P[B] = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{\binom{27}{9}\binom{18}{9}}{\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}} = \frac{1}{\binom{36}{9}}.$$

c) Das Ereignis kann so beschrieben werden:

$$C = \Big\{(S_1, S_2, S_3, S_4) : \ S_1 \in \big\{\{\heartsuit\text{As}, \dots, \heartsuit 6\}, \{\diamondsuit\text{As}, \dots, \diamondsuit 6\}, \{\clubsuit\text{As}, \dots, \clubsuit 6\}, \{\spadesuit\text{As}, \dots, \spadesuit 6\}\big\}\Big\}$$

Daraus folgt direkt

$$P[C] = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{4 \times \binom{27}{9}\binom{18}{9}}{\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}} = \frac{4}{\binom{36}{9}}.$$

d) Das Ereignis kann so beschrieben werden:

$$D = \Big\{(S_1, S_2, S_3, S_4) : \ S_1, S_2 \in \big\{\{\heartsuit\text{As}, \dots, \heartsuit 6\}, \{\diamondsuit\text{As}, \dots, \diamondsuit 6\}, \{\clubsuit\text{As}, \dots, \clubsuit 6\}, \{\spadesuit\text{As}, \dots, \spadesuit 6\}\big\}\Big\}$$

Daraus folgt dann (Es git 12 Möglichkeiten, von den vier Farben jeweils einen kompletten Satz auf Sie und Ihren Vater zu verteilen, dann müssen noch die restlichen 18 Karten auf die anderen Spieler verteilt werden.)

$$P[D] = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{4 \times 3 \times \binom{18}{9}}{\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}} = \frac{12}{\binom{36}{9}\binom{27}{9}}.$$

e) Falls ein weiterer Mitspieler nur Karten der gleichen Farbe hat, dann haben alle Spieler jeweils nur Karten der gleichen Farbe. D.h. das Ereignis kann durch $E = D \setminus D'$ beschrieben werden, wobei

$$D' = \Big\{(S_1, S_2, S_3, S_4) : \ S_1, S_2, S_3, S_4 \in \big\{\{\heartsuit\text{As}, \dots, \heartsuit 6\}, \{\diamondsuit\text{As}, \dots, \diamondsuit 6\}, \{\clubsuit\text{As}, \dots, \clubsuit 6\}, \{\spadesuit\text{As}, \dots, \spadesuit 6\}\big\}\Big\}$$

Offensichtlich ist $D' \subset D$ und daher

$$P[E] = P[D] - P[D'] = P[D] - \frac{|D'|}{|\Omega|} = P[D] - \frac{4!}{\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}} = \frac{12 \times \binom{18}{9} - 24}{\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}}.$$

3. Betrachte $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \,|\, \omega_i \in \{-1, +1\}\}$ und $S_k := \sum_{i=1}^k X_i$, wobei $X_i = \pm 1$ mit Wahrscheinlichkeit 1/2. Weiter gilt:

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{\{S_k = 0\}} = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 1_{\{S_{2k}=0\}},$$

denn S_k gleich 0 sein kann nur für gerade k. Somit, wegen Satz 2.1 im Skript, gilt

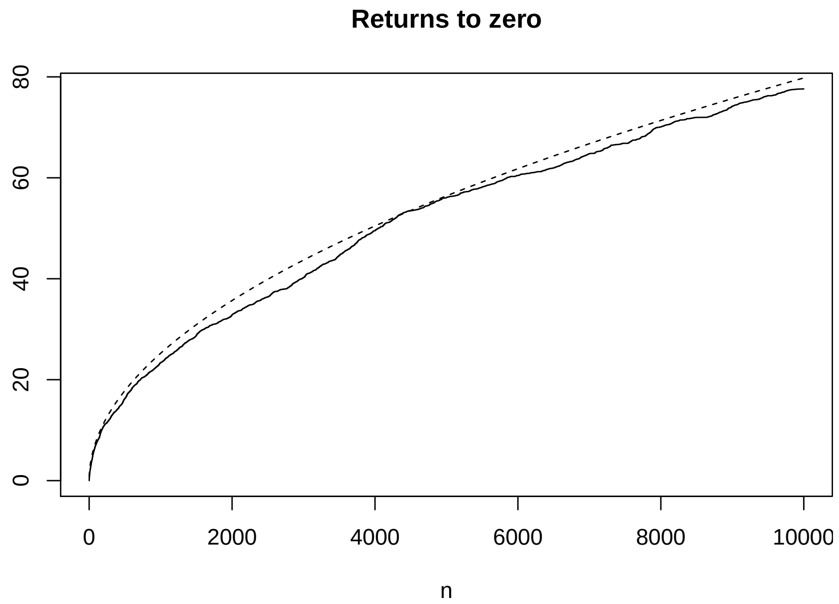
$$E[R_n] = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} P[S_{2k} = 0] = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{2k}{k} 2^{-2k}.$$

Aufgrund der Stirling'sche Formel ist $\binom{2k}{k}2^{-2k} \sim 1/\sqrt{k\pi}$. Also, wegen $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\sqrt{k\pi} = \infty$, erhält man

$$\lim_{n \to \infty} E[R_n] = \infty.$$

Man kann auch die Summe als Integral approximieren, dann erhält man dass sich R_n asymptotisch wie $\sqrt{2n/\pi}$ verhält. Die folgende Abbildung zeigt den Mittelwert von R_n in eine Probe von 100 Irrfahrten im Vergleich mit der asymptotischen Erwartung.

Siehe nächstes Blatt!



Returns to zero
80
60
40
20
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
n