Musterlösung 3

1. Wir definieren $W_i :=$ "Christoph muss an der i-ten Ampel warten" für $i = 1, 2$. Aus der Aufgabenstellung erhält man $P[W_1] = \frac{1}{4}$, $P[W_2^c \mid W_1^c] = \frac{2}{3}$, $P[W_2 \mid W_1] = \frac{1}{7}$.

a) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $P[(W_1 \cap W_2^c) \cup (W_1^c \cap W_2)]$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} P[W_1 \cap W_2^c] &= P[W_2^c \mid W_1]P[W_1] = (1 - P[W_2 \mid W_1])P[W_1] \\ &= (1 - \frac{1}{7}) \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{28} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P[W_1^c \cap W_2] &= P[W_2 \mid W_1^c]P[W_1^c] = (1 - P[W_2 \mid W_1^c])(1 - P[W_1]) \\ &= (1 - \frac{2}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Da $W_1 \cap W_2^c$ und $W_1^c \cap W_2$ disjunkt sind haben wir also

$$P[(W_1 \cap W_2^c) \cup (W_1^c \cap W_2)] = P[W_1 \cap W_2^c] + P[W_1^c \cap W_2] = \frac{6}{28} + \frac{1}{4} = \frac{13}{28}.$$

b) $S := W_1 \cup W_2$ beschreibt das Ereignis, dass Christoph zu spät zur Vorlesung kommt.

$$\begin{aligned} P[S] &= 1 - P[S^c] = 1 - P[W_1^c \cap W_2^c] \\ &= 1 - P[W_2^c \mid W_1^c]P[W_1^c] = 1 - \frac{2}{3} \cdot (1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) Mit dem Satz von Bayes erhält man

$$\begin{aligned} P[W_1^c \mid W_2^c] &= \frac{P[W_2^c \mid W_1^c]P[W_1^c]}{P[W_2^c \mid W_1^c]P[W_1^c] + P[W_2^c \mid W_1]P[W_1]} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \cdot (1 - \frac{1}{4})}{\frac{2}{3} \cdot (1 - \frac{1}{4}) + (1 - \frac{1}{7}) \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{6}{28}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{20}{28}} = \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

d) Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit folgt

$$\begin{aligned} P[W_1 \mid S] &= \frac{P[W_1 \cap S]}{P[S]} = \frac{P[W_1 \cap (W_1 \cup W_2)]}{P[S]} = \frac{P[W_1]}{P[S]} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Da $P[W_1 \mid S] = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = P[W_1]$, sind die Ereignisse W_1 und S abhängig.

e) Sei E_i, $i = 1, \ldots, 10$, das Ereignis, dass Christoph am i-ten Tag zu spät zur Vorlesung kommt. Wir wissen $P[E_i] = P[S] = \frac{1}{2}$. Da die E_i unabhängig sind, ist die Anzahl der Verspätungen X binomialverteilt mit Parametern $n = 10$ und $p = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} P[X \geq 2] &= 1 - P[X = 1] - P[X = 0] = 1 - \binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\ &= 1 - \frac{11}{2^{10}} \ \left(= \frac{2^{10} - 11}{2^{10}}\right). \end{aligned}$$

2. Als Grundraum bietet sich $\Omega = \{A, B, C\}^2 = \{A, B, C\} \times \{A, B, C\}$ an. Dabei steht die erste Komponente für Heidis Note, die zweite für Peters Note. Also

$$\begin{array}{ccc} (A,A) & (A,B) & (A,C) \\ (B,A) & (B,B) & (B,C) \\ (C,A) & (C,B) & (C,C) \end{array}$$

Seien

$$\begin{aligned} E_1 &= \{A,B,C\} \times \{B\} = \{(A,B),(B,B),(C,B)\} \\ E_2 &= \{B\} \times \{A,B,C\} = \{(B,A),(B,B),(B,C)\} \\ E_3 &= \{(C,B),(B,C),(B,B)\} \qquad \text{und} \\ E_4 &= \{(A,B),(B,A),(B,B)\}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind

$$P[E_1] = 0.3, \qquad P[E_2] = 0.4 \qquad \text{und} \qquad P[E_3] = 0.1.$$

Das gesuchte $P[E_4]$ lässt sich folgendermassen berechnen:

$$\begin{aligned} P[E_4] &= P[\{(A,B),(B,B)\}] + P[\{(B,A)\}] \\ &= P[E_1 \backslash \{(C,B)\}] + P[E_2 \backslash \{(B,B),(B,C)\}] \\ &= P[E_1] - P[\{(C,B)\}] + P[E_2] - P[\{(B,B),(B,C)\}] \\ &= P[E_1] + P[E_2] - P[E_3] \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

3. a) Es ist für $j \geq 0$

$$\begin{aligned} P[X=j] &= \sum_{k \geq j} P[X=j, Y=k] \\ &= \sum_{k \geq j} P[X=j \mid Y=k] \cdot P[Y=k] \\ &= \sum_{k \geq j} \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(k+j)!}{j!k!} p^j (1-p)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^j}{j!} \sum_{k \geq 0} \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^j}{j!} e^{(1-p)\lambda} \;=\; e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^j}{j!} \end{aligned}$$

Also ist X poissonverteilt mit Parameter $p\lambda$. Ebenso ist $Y - X$ poissonverteilt mit Parameter $(1-p)\lambda$.

Siehe nächstes Blatt!

b) Für $k, j \geq 0$ ist

$$\begin{aligned}
P[Y - X = k, X = j] = P[Y = k + j, X = j] &= P[X = j \mid Y = k + j] \cdot P[Y = k + j] \\
&= \binom{k+j}{j} p^j (1-p)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} \\
&= \frac{1}{j!k!} p^j (1-p)^k e^{-p\lambda} e^{-(1-p)\lambda} \lambda^k \lambda^j \\
&= \left(e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^j}{j!} \right) \cdot \left(e^{-(1-p)\lambda} \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!} \right) \\
&= P[X = j] \cdot P[Y - X = k]
\end{aligned}$$

Folglich sind X und $Y - X$ unabhängig.