Musterlösung 4

1. a) $\mathbb{P}(A > B) = \mathbb{P}(A = 4, B = 3) = 4/6 \cdot 1 = 2/3$
$\mathbb{P}(B > C) = \mathbb{P}(B = 3, C = 2) = 1 \cdot 4/6 = 2/3$
$\mathbb{P}(C > D) = \mathbb{P}(C = 6, D \leq 5) + \mathbb{P}(C = 2, D = 1) = 2/6 \cdot 1 + 2/3 \cdot 1/2 = 2/3$
$\mathbb{P}(D > A) = \mathbb{P}(D = 5, A \leq 4) + \mathbb{P}(D = 1, A = 0) = 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 2/6 = 2/3$

b) Das Beispiel der intransitiven Würfel zeigt, dass die Relation „ist mit größerer Wahrscheinlichkeit größer“ für Zufallsvariablen nicht transitiv sein muss. Also hier gibt es keinen *stärksten* Würfel. Wenn man jedoch als zweiter seinen Würfel auswählt, kann man einen wählen, der *stärker* ist als der zuvor gewählte Würfel.

2. a) X ist binomialverteilt mit Parametern $n = 1024$ und $p = 10^{-3}$, d.h.

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{1024}{k} \, 0.001^k \, 0.999^{1024-k} \quad \text{für } k = 0, \ldots, 1024.$$

b) Exakte Wahrscheinlichkeit: $\mathbb{P}(X \leq 3) =$`pbinom(3,1024,.001)=0.9795684`.
Da $n = 1024$ relativ gross und $p = 10^{-3}$ relativ klein ist, ist X approximativ poissonverteilt mit Parameter $\lambda = np = 1024 \cdot 0.001 = 1.024$, d.h.

$$\mathbb{P}(X = k) \approx \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Diese Näherung hat den Vorteil, dass sie sich, besonders für grosses k, leichter berechnen lässt als der exakte Wert. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Codewort richtig decodiert wird, ist somit

$$\mathbb{P}(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(X = k) \approx \exp(-\lambda)\big(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6}\big) = 0.97950487\ldots$$

(Relativer Fehler $6.5 \cdot 10^{-5}$)

c) Die Anzahl Y falsch decodierter Wörter ist (mit der in Aufgabe **b)** vorgenommenen Näherung) Binomial$(10, 1 - 0.9795)$ verteilt. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\mathbb{P}(Y \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) \approx 1 - \binom{10}{0} \, 0.0205^0 \, 0.9795^{10} = 0.187\ldots$$

Bitte wenden!

3. **a)** $G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (1-p)^k p = \frac{p}{1-z(1-p)}$ (geometrische Summe).
Diese Reihe konvergiert IFF

$$|z(1-p)| < 1,$$

d.h.

$$z \in (\frac{-1}{1-p}, \frac{1}{1-p})$$

.
Aus $0 < p < 1$ folgt $\frac{1}{1-p} > 1$; insbesondere gilt, dass $G_X(1)$ und $G'_X(1)$ definiert sind.

b) Da wir wollen, dass $G_X(z)$ stetig in $z = 0$ sein soll, benutzen wir die Konvention $0^0 \equiv 1$. Folglich gilt $G_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$. Beachte im Allgemeinen gilt $G_X^{(k)}(0) = k!\mathbb{P}(X = k)$. Klarerweise gilt $G_X(1) = \frac{p}{1-(1-p)} = 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)$.

c)

$$G'_X(z) = \left(\frac{p}{1-z(1-p)}\right)' = \frac{(1-p)p}{(1-z(1-p))^2}$$
$$G'_X(1) = \frac{(1-p)p}{p^2} = \frac{1-p}{p}$$

Das Differenzieren der Reihe innerhalb des Konvergenzradius führt zu

$$G'_X(z)|_{z=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} \mathbb{P}(X = k)|_{z=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}[X].$$