Musterlösung 5

1. Betrachte die Irrfahrt $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, wobei

$$X_k := \begin{cases} +1 & \text{Arno gewinnt die } k\text{-te Runde} \\ -1 & \text{Benno gewinnt die } k\text{-te Runde.} \end{cases}$$

a) $\mathbb{P}(S_k \in (-a,b)\ \forall k \leq n) \leq \mathbb{P}(S_k \in (-\infty,b)\ \forall k \leq n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, die letzte Konvergenzaussage folgt aus Korollar 2.1 im Skript mit $T_b = \inf\{n > 0 \,|\, S_n = b\}$. Also ist

$$\begin{aligned} p_n + q_n &= \mathbb{P}(\text{Arno am Ende ruiniert}) + \mathbb{P}(\text{Benno am Ende ruiniert}) \\ &= \mathbb{P}(\text{Arno oder Benno am Ende ruiniert}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\text{weder Arno noch Benno am Ende ruiniert}) \\ &= 1 - \underbrace{\mathbb{P}(S_k \in (-a,b)\ \forall k \leq n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1. \end{aligned}$$

b) Für die Stoppzeit $\tau := n \wedge \inf\{k \geq 1 \,|\, S_k = -a \text{ oder } S_k = b\}$ beschreibt die Zufallsvariable S_τ definiert durch

$$\begin{aligned} S_\tau &: \Omega \to \mathbb{Z} \\ \omega &\mapsto S_{\tau(\omega)}(\omega) \end{aligned}$$

Arnos Gewinn am Spielschluss, nach Satz 2.5 im Skript gilt ja $\mathbb{E}S_\tau = 0$. Da die Folge p_n beschränkt ist und monoton wächst (die Anzahl der Pfade die im Ruin von Arno enden werden ja pro Schritt mindestens verdoppelt, während sich die Anzahl aller Pfade insgesamt genau verdoppelt), konvergiert sie auch und wir setzen $p := \lim_{n\to\infty} p_n$ sowie $q := \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty}(q_n + p_n) - p_n \overset{a)}{=} 1 - p$. Wenn A bzw. B die Ereignisse bezeichnen, dass Arno bzw. Benno am Spielschluss ruiniert ist, so folgt mit der Definition von Erwartungswert

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{E}(S_\tau) &= \sum_{x \in S_\tau(\Omega)} x\,\mathbb{P}(S_\tau = x) \\ &= -a\,\mathbb{P}(S_\tau = -a) + b\,\mathbb{P}(S_\tau = b) + \sum_{x\in(-a,b)} x\,\mathbb{P}(S_\tau = x) \\ &= -a \underbrace{p_n}_{\to p} + b \underbrace{q_n}_{\to 1-p} + \underbrace{\sum_{x\in(-a,b)} x\,\mathbb{P}(S_\tau = x)}_{|\cdot| \leq \max(a,b)\cdot P(S_k \in (-a,b)\ \forall k \leq n) \to 0} \end{aligned}$$

also

$$0 = -ap + b(1-p) \qquad \text{sowie weiters} \qquad p = \frac{b}{a+b}.$$

2. **a)** Need to show $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ $^{(\dagger)}$ for any disjoint $A, B \in \mathcal{F}$ (then finite additivity follows by induction). Consider cases:

i) If A and B are both finite, then so is $A \cup B$ and both sides of $(\dagger)$ are equal to 0.

ii) If w.l.o.g. A is not finite, then A^c is finite and so is B since $B \subset A^c$. Hence both sides of $(\dagger)$ equal 1.

b) Let $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ be an enumeration of Ω. Then

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{\omega_i\}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 0 \quad \text{(contradiction!)}$$

c) Suppose $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$ where $A_i \in \mathcal{F}$ are pairwise disjoint. Then in fact only finitely many of A_i are non-empty. This is because all sets in $\mathcal{F}$ are either finite or cofinite. Furthermore:

i) Countably infinite union of finite non-empty sets is also countably infinite, so neither itself nor its complement is finite since Ω is uncountable.

ii) If, however, some set A_k in this union is cofinite, then there are only finitely many elements left in A_k^c to form the other sets. Hence again have only finitely many $i \in \mathbb{N}$ s.t. A_i non-empty.
The empty sets in the union can be neglected (since $A \cup \emptyset = A$ and $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$), so we are back to the finite union case in a).

d) Countable union of countable sets is countable, hence if $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ are countable then

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = 0 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$

If $\exists k : A_k$ is uncountable, then all other A_i, $i \neq k$ are countable, since $A_i \subset A_k^c \ \forall i \neq k$ (so $\mathbb{P}(A_i) = 0 \quad \forall i \neq k$). Hence $\mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = 1$ in this case and $\mathbb{P}$ is countably additive.

3. Es bezeichne $\mathcal{M}$ die Menge aller σ-Algebren, die die Mengen von $\mathcal{A}$ enthalten:

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{B} \,|\, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \text{ ist } \sigma\text{- Algebra und } A \in \mathcal{B} \text{ für alle } A \in \mathcal{A}\ \}$$

Der Durchschnitt $\mathcal{F} = \cap_{\mathcal{B}\in\mathcal{M}} \mathcal{B}$ von σ-Algebren ist wieder eine σ-Algebra: $\Omega \in \mathcal{F}$, falls $A \in \mathcal{F}$ muss auch $A^c \in \mathcal{F}$ und falls $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ muss auch die Vereinigung $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$ sein. Daher folgt, dass die kleinste σ-Algebra, die alle Mengen von $\mathcal{A}$ enthält durch

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{B}\supseteq\mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}}} \mathcal{B}$$

gegeben ist.

4. **a)** Allgemeiner definiert jede Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) = 1$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $2^{\mathbb{N}}$ durch $\mathbb{P}(N) := \sum_{n\in N} f(n)$ $(N \subseteq \mathbb{N})$. [1]

Offensichtlich ist $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1$. Für eine Folge N_i $(i \in \mathbb{N})$ von disjunkten Teilmengen von $\mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i) = \sum_{n\in\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i} f(n) \overset{*}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n\in N_i} f(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_i),$$

wobei ($\overset{*}{=}$) aus der Tatsache folgt, dass die Mengen N_i disjunkt sind und $f(n) \geq 0$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$. Aus der Analysis folgt dann (siehe auch Umordnungsatz), dass es auf die Nummerierung der Elemente nicht ankommt ($\sum_{n\in N} f(n)$ ist ja eigentlich definiert durch $\sup_{A\subseteq N \text{ endlich}} \sum_{n\in A} f(n)$).

Nun setzen wir $f(n) := \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}$ $(n \in \mathbb{N})$.

b) Sei p ein Primzahl, dann ist $N_p = \{np : n \in \mathbb{N}\}$ und somit

$$\mathbb{P}(N_p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{(np)^s} = \frac{1}{p^s} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}}_{=1} = \frac{1}{p^s}.$$

c) Zu zeigen ist

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{m} N_{p_i}) = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(N_{p_i}) \qquad\qquad (m \in \mathbb{N}; p_i \text{ verschieden, prim}).$$

Seien also $m \in \mathbb{N}$ und $p_1, \ldots, p_m$ unterschiedliche Primzahlen, dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{m} N_{p_i}) &= \mathbb{P}(\{n\prod_{i=1}^{m} p_i : n \in \mathbb{N}\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{(n\prod_{i=1}^{m} p_i)^s} \\ &= \frac{1}{(\prod_{i=1}^{m} p_i)^s} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}}_{=1} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} p_i^s} = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(N_{p_i}).\end{aligned}$$

d) Mit der Unabhängigkeit gilt

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} N_{p_i}^c) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(N_{p_i}^c) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(N_{p_i})) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - p_i^{-s}\right)$$

Die Folge $B_n := \bigcap_{i=1}^{n} N_{p_i}^c$ $(n \in \mathbb{N})$ ist eine monoton fallende Folge von Ereignissen die gegen $\bigcap_{i=1}^{\infty} N_{p_i}^c = \{1\}$ konvergiert, die letzte Gleichheit folgt aus der Tatsache, dass 1 die einzige Zahl ist, die durch keine Primzahl teilbar ist. Aus der Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes folgt nun

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 - p_i^{-s}\right) = \mathbb{P}(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

und somit

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - p_i^{-s}\right)}.$$

[1] Für $G := \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) < \infty$ setze man einfach $\tilde{f}(n) := \frac{f(n)}{G}$.