Musterlösung 6

1. **a)** $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i^c = (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)^c$

b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right)$

c) $\left[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right) \right]^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{k\geq n} A_k^c \right)$

d) $\bigcup_{j\neq k} \left[(A_j \cap A_k) \bigcap_{i\notin\{j,k\}} A_i^c \right]$

e) $\bigcap_{k \text{ gerade}} A_k^c = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{2k} \right)^c$

Nur die Ereignisse in b) und c) gehören zu $\mathcal{A}^*$. Die andere Ereignisse hängen von z.B. A_1, A_2, A_3 ab.

2. **a)** Sei $\Omega := [0,1]$, $\mathcal{A} := \mathcal{B}([0,1])$ und $\mathbb{P}$ das Lebesgue Mass auf $[0,1]$. Betrachte die Mengen $A_n := [0, 1/n)$ und beachte $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

sowie

$$\mathbb{P}(\cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} A_k) = \mathbb{P}(\cap_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Bemerkung: Borel-Cantelli ist hier nicht anwendbar, da die A_n's nicht unabhängig sind. In der Tat gilt für unser Beispiel, dass

$$\mathbb{P}(A_n \cap A_m) = \frac{1}{\max\{n,m\}} \overset{\text{i.allg.}}{\neq} \frac{1}{n}\frac{1}{m} = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_m).$$

b) **"$\Leftarrow$":**

$$C := \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right) \subset \bigcup_{k\geq 1} A_k =: B$$

Also $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(C) = 1$, weil $C \subset B$.
"$\Rightarrow$": Version 1

$$B = \bigcup_{k\geq 1} A_k = \left(\bigcup_{1\leq k\leq n} A_k \right) \bigcup \left(\bigcup_{k>n} A_k \right) =: B_n \cup B_n^*$$

$$1 = \mathbb{P}(B) \overset{\text{indep.}}{=} \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_n^*) - \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(B_n^*) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Es gilt $\mathbb{P}(B_n) = 1 - \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^n A_k^c) \overset{\text{indep.}}{=} 1 - \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k^c) =: p_n < 1\ \forall n$, weil $\mathbb{P}(A_k^c) > 0\ \forall k$.
Also $p_n + \mathbb{P}(B_n^*) - p_n \cdot \mathbb{P}(B_n^*) = (1-p_n)\mathbb{P}(B_n^*) + p_n = 1$ und $\mathbb{P}(B_n^*) = 1\ \forall n$.
Deshalb auch $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\bigcap_n B_n^*) = 1$ (das Komplement ist eine Nullmenge).

Bitte wenden!

"⇒": Version 2
We show equivalently $0 = \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k^c) =: \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n)$. By assumption, we have, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
0 = \mathbb{P}(\bigcap_{k\geq 1} A_k^c) &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{N} A_k^c) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^c \cap \bigcap_{k=n}^{N} A_k^c) \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^c) \cdot \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k^c) \cdot \mathbb{P}(C_n),
\end{aligned}$$

where we have used continuity of $\mathbb{P}$ in the second and last steps, and independence of the events A_k^c, $k = 1, \ldots, N$. Since $\mathbb{P}(A_k^c) > 0$ for all k by assumption, this yields $\mathbb{P}(C_n) = 0$ for all $n \in \mathbb{N}$, hence the claim (countable unions of sets of zero measure have zero measure).

3. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} P(X_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} e^{-\lambda_n}\frac{\lambda_n^k}{k!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{C^k}{k!} = Ce^C < \infty.
\end{aligned}$$

Die erste Aussage des Borel-Cantelli Lemmas liefert dann das Resultat.

4. a) Sei U eine auf $(0,1)$ uniform verteilte Zufallsvariable. Die Verteilungsfunktion einer EXP(2)-verteilten Zufallsvariable ist durch $F(x) = (1 - e^{-2x})1_{[0,\infty)}(x)$ gegeben. Betrachten wir nun $X := F^{-1}(U) = \frac{-1}{2}\log(1-U)$. Man hat, dass für $x \geq 0$

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{-1}{2}\log(1-U) \leq x\right) = P(U \leq 1 - e^{-2x}) = 1 - e^{-2x},$$

also ist $X \sim$ EXP(2)-verteilt. Das heißt

$$\begin{array}{lll}
F^{-1}(0.353) = 0.218 & F^{-1}(0.101) = 0.053 & F^{-1}(0.455) = 0.303 \\
F^{-1}(0.928) = 1.25 & F^{-1}(0.285) = 0.167 &
\end{array}$$

sind Realisierungen einer EXP(2)-verteilten Zufallsvariablen.

b) Die folgende Zufallsvariable ist gleichverteilt auf $\{1, \ldots, 10\}$:

$$X(\omega) := \begin{cases} \sum_{k=1}^{10} k \cdot 1_{(\frac{k-1}{10}, \frac{k}{10}]}(\omega) & \text{falls } \omega \in \Omega = (0,1), \\ 1 & \text{falls } \omega = 0. \end{cases}$$

Also sind

$$X(0.353) = 4 \quad X(0.101) = 2 \quad X(0.455) = 5 \quad X(0.918) = 10 \quad X(0.285) = 3$$

Realisierungen einer auf $\{1, \ldots, 10\}$ gleichverteilten Zufallsvariablen.

c) Die Zufallsvariable

$$X(\omega) := \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot 1_{\left(\frac{1}{e}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{1}{l!}, \frac{1}{e}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}\right]}(\omega) & \text{falls } \omega \in \Omega = (0,1), \\ 0 & \text{falls } \omega = 0 \end{cases}$$

ist Poisson verteilt mit Parameter 1. Insbesondere gilt

$$\tfrac{1}{e}\textstyle\sum_{l=0}^{-1}\frac{1}{l!} = 0 \quad \tfrac{1}{e}\sum_{l=0}^{0}\frac{1}{l!} = 0.368 \quad \tfrac{1}{e}\sum_{l=0}^{1}\frac{1}{l!} = 0.736 \quad \tfrac{1}{e}\sum_{l=0}^{2}\frac{1}{l!} = 0.920$$

Also sind

$$X(0.353) = 0 \quad X(0.101) = 0 \quad X(0.455) = 1 \quad X(0.918) = 2 \quad X(0.285) = 0$$

Realisierungen einer POIS(1)-verteilten Zufallsvariablen.