Musterlösung 7

1. **a)** Die Dichte muss zu eins aufintegrieren, deshalb gilt:

$$\int_7^{10} c\,(x-7)^2\,dx \stackrel{!}{=} 1$$

1.Version: Polynom ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned}\int_7^{10} c\,(x-7)^2\,dx &= c\cdot\int_7^{10} x^2-14x+49dx\\ &= c\cdot\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{14}{2}x^2+49x\right)\Big|_7^{10}\\ &= \left(\frac{1}{3}10^3-7\cdot 10^2+49\cdot 10-\frac{1}{3}7^3+7\cdot 7^2-49\cdot 7\right)\\ &= c\cdot 9\end{aligned}$$

2.Version: Mit Substitution:

$$\begin{aligned}\int_7^{10} c\,(x-7)^2\,dx &\stackrel{y:=x-7}{=} c\cdot\int_0^3 y^2dx\\ &= c\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_0^3\\ &= c\cdot\frac{1}{3}\left(3^3-0\right)\\ &= c\cdot 3^2\\ &= c\cdot 9\end{aligned}$$

d.h. $c=\frac{1}{9}$.

b) $F(x)=P(X\leq x)=\int_7^x c(z-7)^2dz=c\frac{(x-7)^3}{3}=\frac{(x-7)^3}{27}\ \ (7\leq x\leq 10)$.

c) $P(8<X<9)=F(9)-F(8)=\frac{2^3}{3c}-\frac{1^3}{3c}=\frac{8}{27}-\frac{1}{27}=\frac{7}{27}$.

2. **a)** Wir bezeichnen das Dreieck mit D, dann ist laut Angabe

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}c & (x,y)\in D\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}.$$

Die Fläche von D ist 1, daraus folgt sofort $1=\int\int_D cdxdy=c$, also $c=1$.

b)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{x+1}1dy=x+1 & -1\leq x<0\\ \int_0^{-x+1}1dy=1-x & 0\leq x<1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}.$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-1+y}^{1-y}1dy=2(1-y) & 0\leq y<1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}.$$

c) $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-1}^{0} x^2 + x dx + \int_0^1 x - x^2 dx = 0.$

$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \frac{1}{6}$, also

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{6}.$

$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 2y(1-y) dy = \frac{1}{3}.$

$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_0^1 2y^2(1-y) dy = \frac{1}{6},$

also $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$

d) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$

$\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int\int_D xy dx dy = \int_{y=0}^{1}\int_{-1+y}^{1-y} xy dx dy = \int_0^1 yx^2|_{x=-1+y}^{1-y} dy = \int_0^1 y((1-y)^2 - (-1+y)^2) dy = 0.$

Somit ist wegen $\mathbb{E}[X] = 0$ auch $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, d.h. X und Y sind unkorreliert. X und Y sind aber nicht unabhängig, das ergibt sich sofort aus $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$. Das ist aber auch intuitiv sofort klar, abhängig von der Beobachtung von Y kann man gewisse Werte für X sofort ausschließen, wenn Y z.B. $\frac{1}{2}$ ist, dann kann der Betrag von X nicht mehr größer als $\frac{1}{2}$ sein, was a priori (also bevor man Y kennt) nicht auszuschließen ist, aus der Beobachtung von Y gewinnt man also Information über X (bedingte Verteilung von X gegeben Y).

3. **a)** $f_{X,Y}$ ist nirgendwo negativ und erfüllt die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dy\ dx = \int_{x=1}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty} e^{-x^2 y}\ dy\ dx$$

$$= \int_{x=1}^{\infty}\left[-\frac{e^{-x^2 y}}{x^2}\right]_{y=0}^{y=\infty} dx = \int_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\ dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 1.$$

Somit erfüllt $f_{X,Y}$ die Forderungen an eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

b)

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dy = \int_{y=0}^{\infty} e^{-x^2 y}\ dy = \frac{1}{x^2} \qquad \text{für } x \geq 1$$

Also $X \sim \mathrm{Pareto}(x_m = 1, \alpha = 1)$

c)

$$P[Y \leq \frac{1}{X^2}] = \int_{x=1}^{\infty}\int_{y=0}^{1/x^2} e^{-x^2 y}\ dy\ dx = \int_{x=1}^{\infty}\left[-\frac{e^{-x^2 y}}{x^2}\right]_{y=0}^{y=1/x^2} dx$$

$$= (1 - e^{-1})\int_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\ dx = 1 - e^{-1} \approx 0.63$$

4. Wir haben es hier mit der transformierten Zufallsvariable $A = f(X) = X(1-X)$ ($f(x) := x(1-x)$) zu tun, welche den (zufälligen) Wert des Flächeninhalts in Abhängigkeit von X angibt.

Wir berechnen zuerst die Verteilungsfunktion von A: A ist offensichtlich niemals negativ, außerdem folgern wir aus der Extremwertrechnung angewendet auf die Funktion $f(x) = x(1-x)$, dass f auf $[0,1]$ das Maximum $\frac{1}{4}$ besitzt, woraus insgesamt folgt, dass A nur Werte in $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ annimmt, woraus offensichtlich $F_A(a) = \mathbb{P}(A \leq a) = 0$ für $a < 0$ und $F_A(a) = \mathbb{P}(A \leq a) = 1$ für $a \geq \frac{1}{4}$ folgt, uns fehlt also nur mehr der Bereich $0 \leq a < \frac{1}{4}$, dazu berechnen wir zunächst

$$F_A(a) = \mathbb{P}(A \leq a) = \mathbb{P}(X(1-X) \leq a) = \mathbb{P}(X^2 - X + a \geq 0),$$

Siehe nächstes Blatt!

durch Lösen der quadratischen Gleichung $x^2 - x + a = 0$ $\left(x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a}\right)$ sehen wir das sich das Ereignis $\{X^2 - X + a \geq 0\}$ (für den Fall $0 \leq a < \frac{1}{4}$) in die beiden disjunkten Ereignisse $\left\{X \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a}\right\}$ sowie $\left\{X \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a}\right\}$ zerlegen lässt, es folgt also weiters

$$\begin{aligned} F_A(a) &= \mathbb{P}(X^2 - X + a \geq 0) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a}) + \underbrace{\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a})}_{=1-\mathbb{P}(X<\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a})=1-\mathbb{P}(X\leq\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a})} \\ &= F_X\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a}\right) + 1 - F_X\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a}\right), \end{aligned}$$

und wegen $F_X(x) = x$ $(0 \leq x \leq 1)$ bekommen wir schlußendlich

$$F_A(a) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a} + 1 - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a}\right) = 1 - 2\sqrt{\frac{1}{4} - a} = 1 - \sqrt{1 - 4a}.$$

Zusammenfassend ist die Verteilungsfunktion von A

$$F_A(a) = \begin{cases} 0 & a < 0, \\ 1 - \sqrt{1 - 4a} & 0 \leq a < \frac{1}{4}, \\ 1 & a \geq \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Die Dichte f_A erhalten wir durch Ableiten von F_A:

$$f_A(a) = F_A'(a) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-4a}} & 0 \leq a < \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Dichte hat somit einen Pol bei $a = \frac{1}{4}$. [1]

Den Erwartungswert von A können wir nun auf zwei Arten ausrechnen, am nahenliegendsten ist es den Erwartungswert direkt aus der Dichte von A mittels

$$\mathbb{E}[A] = \int_{-\infty}^{\infty} a f_A(a)\, da = \dots,$$

einfacher ist es in diesem Fall aber die Formel für den Erwartungswert von transformierten Zufallsvariablen zu verwenden, nämlich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[X(1 - X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(1 - x) f_X(x)\, dx \\ &= \int_0^1 x - x^2\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Die Varianz von A erhalten wir durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(A) = \mathbb{E}[A^2] - \mathbb{E}[A]^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(1 - x)^2 f_X(x)\, dx - \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ &= \int_0^1 x^2 - 2x^3 + x^4\, dx - \frac{1}{36} = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 - \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{36} = \frac{1}{180}. \end{aligned}$$

[1] Eine Dichte kann an endlich vielen Punkten geändert werden und bleibt immer noch die Dichte der selben Zufallsvariable, eine Dichte ist also nur in dem Sinne eindeutig, dass zwei Funktionen die Dichte der selben Zufallsvariable sind, nur an wenigen Stellen (zumindest endlich viele) unterschiedlichen Funktionswert haben. Die Funktion

$$\tilde{f}_A(a) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-4a}} & 0 < a < \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist also auch eine Dichte von A obwohl $f_A(0) = 2 \neq 0 = \tilde{f}_A(0)$. Aber Vorsicht!! Das gilt nicht für Verteilungsfunktionen, deren Funktionswerte sind in jedem Punkt eindeutig.

5. Aus *Schickinger, Steger - Diskrete Strukturen 2: Wahrscheinlichkeitstheorie Und Statistik* Seite 66.

Beweis: Für jedes $t > 0$ gilt

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] = \Pr[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}].$$

Da e^{tX} immer positiv ist, können wir nun die Markov-Ungleichung anwenden und erhalten

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] = \Pr[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}] \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{t(1+\delta)\mu}}.$$

Damit haben wir die momenterzeugende Funktion $\mathbb{E}[e^{tX}]$ ins Spiel gebracht. Wegen der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind auch die Zufallsvariablen $e^{X_1}, \ldots, e^{X_n}$ unabhängig und wir können $\mathbb{E}[e^{tX}]$ mit Hilfe der Multiplikativität des Erwartungswerts bei unabhängigen Zufallsvariablen direkt umformen zu

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{n} tX_i\right)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[e^{tX_i}].$$

Hierbei bezeichnet $\exp(x)$ die Exponentialfunktion (also $\exp(x) = e^x$).

Den Wert von $\mathbb{E}[e^{tX_i}]$ für ein beliebiges i rechnen wir ganz einfach aus:

$$\mathbb{E}[e^{tX_i}] = e^{t\cdot 1}p_i + e^{t\cdot 0}(1-p_i) = e^t p_i + 1 - p_i = 1 + p_i(e^t - 1).$$

Damit gilt

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \frac{\prod_{i=1}^{n}(1 + p_i(e^t - 1))}{e^{t(1+\delta)\mu}}.$$

Wegen $1 + x \leq e^x$ für alle $x \geq 0$ folgt

$$\begin{aligned}\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] &\leq \frac{\prod_{i=1}^{n}\exp(p_i(e^t - 1))}{e^{t(1+\delta)\mu}} \\ &= \frac{\exp(\sum_{i=1}^{n} p_i(e^t - 1))}{e^{t(1+\delta)\mu}} = \frac{e^{(e^t-1)\mu}}{e^{t(1+\delta)\mu}} =: f(t).\end{aligned}$$

Diese Schranke enthält immer noch den Parameter t. Um die (mit diesem Ansatz) bestmögliche Schranke zu erhalten, wählen wir t so, dass $f(t)$ minimal wird. Dazu berechnen wir die Ableitung

$$f'(t) = f(t) \cdot \mu \cdot (e^t - (1+\delta))$$

und sehen somit, dass $t = \ln(1+\delta)$ eine geschickte Wahl ist. Durch Einsetzen dieses Werts in $f(t)$ folgt der Satz. □

Sei nun $X \sim \text{Binom}(n, p = 1/2)$ und $\delta = 10\%$. Dann $\mu = np = n/2$ und $\text{Var}(X) = np(1-p) = n/4$. Die Ungleichung von Chebyshev ergibt

$$\mathbb{P}(X \geq (1+\delta)\mu) = \mathbb{P}(X - \mu \geq \delta\mu) \overset{\text{symm.}}{=} \frac{1}{2}\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \delta\mu) \overset{\text{Cheb.}}{\leq} \frac{\text{Var}(X)}{2\delta^2\mu^2} = \frac{n/4}{2 \cdot 0.01 \cdot n^2/4} = \frac{50}{n}.$$

Berechnen mit R: Chernoff `(exp(d)/(1+d)^(1+d))^(n/2)` und exakt `pbinom((1-d)*n/2,n,0.5)`.

$n =$	1000	10000
Chebyshev	0.05	0.005
Chernoff	0.09	$3.1 \cdot 10^{-11}$
exakt	0.00087	$7.8 \cdot 10^{-24}$