Koordinator
Vincenzo Ignazio

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Musterlösung Serie 8

1. a) Verteilungsfunktion von Z:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) = P[Z \le z] &= P[Z \le z | Y > 0] P[Y > 0] + P[Z \le z | Y \le 0] P[Y \le 0] \\
&\overset{(*)}{=} 1/2 P[X \le z | Y > 0] + 1/2 P[-X \le z | Y \le 0] \\
&\overset{(**)}{=} 1/2 P[X \le z] + 1/2 P[X \ge -z] = 1/2\,(\Phi(z) + 1 - \Phi(-z)) = \Phi(z)
\end{aligned}$$

Also ist Z ebenfalls $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt.
(*) falls $Y > 0$ ist, so ist $Z = X$ und falls $Y \le 0$ ist, so ist $Z = -X$.
(**) da X und Y unabhängig sind.

b) Mit $\varrho(X,Z) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sigma_X\,\sigma_Z}$ folgt aus

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Z) &= E[(X - E[X])(Z - E[Z])] = E[XZ] = E[\mathrm{sign}(Y)\,X^2] \\
&= E[\mathrm{sign}(Y)]\,E[X^2] = 0,
\end{aligned}$$

dass die Korrelation von X und Z gleich 0 ist.

c) $P[X + Z = 0] = P[Z = -X] = P[Y \le 0] = 1/2$

d) Nein, denn sonst wäre $X + Z \sim \mathcal{N}(0,2)$ und damit $P[X + Z = 0] = 0$, im Widerspruch zu c).
Alternative Begründung: wenn X und Z unabhängig wären, müsste für alle A und B in $\mathbb{R}$ gelten

$$P[X \in A, Z \in B] = P[X \in A] P[Z \in B],$$

aber z.B. es gilt nicht für $A = [-1,1]$ und $B = [2,\infty)$.

2. a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(Y-\beta)^2] &= \mathbb{E}[((Y - \mathbb{E}[Y]) + (\mathbb{E}[Y] - \beta))^2] \\
&= \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2 + 2\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])(\mathbb{E}[Y] - \beta)] + (\mathbb{E}[Y] - \beta)^2] \\
&= \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2] + 2\,\underbrace{\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])(\mathbb{E}[Y] - \beta)]}_{=(\mathbb{E}[Y]-\beta)\,\mathbb{E}[Y - \mathbb{E}[Y]]=0} + (\mathbb{E}[Y] - \beta)^2,
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

-

also ist $\mathbb{E}[(Y-\beta)^2]$ minimal, wenn der letzte Term oben verschwindet, also wenn $\beta = \mathbb{E}[Y]$. Das Minimum ist dann $\mathbb{E}[(Y-\beta)^2] = \mathrm{Var}[Y]$.
Alternativ kann man direkt

$$\mathbb{E}[(Y-\beta)^2] = \mathrm{Var}[Y-\beta] + (\mathbb{E}[Y-\beta])^2 = \mathrm{Var}[Y-\beta] + (\mathbb{E}[Y]-\beta)^2$$

verwenden, was wiederum für $\beta = \mathbb{E}[Y]$ minimal ist, woraus sich genauso $\mathbb{E}[(Y-\beta)^2] = \mathrm{Var}[Y]$ im Minimum ergibt.

b) Gesucht sind nun α und β, die den Ausdruck

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(Y-(\alpha X+\beta))^2] &= \mathrm{Var}[Y-(\alpha X+\beta)] + \mathbb{E}[Y-(\alpha X+\beta)]^2 \\ &= \mathrm{Var}[Y-\alpha X] + \mathbb{E}[Y-(\alpha X+\beta)]^2\end{aligned}$$

minimieren. Da der erste Term unabhängig von β ist, braucht β nur den zweiten Summanden zu minimieren. Offensichtlich ist

$$\beta = \mathbb{E}[Y] - \alpha\mathbb{E}[X]$$

die richtige Wahl, da dann $\mathbb{E}[Y-(\alpha X+\beta)]^2\,(\geq 0)$ verschwindet. Um den anderen Term zu minimieren formen wir zunächst um, aus der Bilinearität der Kovarianz folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[Y-\alpha X] &= \mathrm{Cov}(Y-\alpha X, Y-\alpha X) \\ &= \mathrm{Var}[Y] + \alpha^2\,\mathrm{Var}[X] - 2\alpha\,\mathrm{Cov}(X,Y),\end{aligned}$$

Ableiten nach α und Nullsetzen

$$\frac{d}{d\alpha}\mathrm{Var}[Y-\alpha X] = 2\alpha\,\mathrm{Var}[X] - 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) = 0,$$

ergibt $\alpha = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}[X]}$. Mit dieser Wahl von α und β ergibt sich dann das Minimum zu

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[(Y-(\alpha X+\beta))^2] \\ &= \mathrm{Var}[Y] + \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)^2}{\mathrm{Var}[X]^2}\mathrm{Var}[X] - 2\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}[X]}\,\mathrm{Cov}(X,Y) \\ &= \mathrm{Var}[Y] - \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)^2}{\mathrm{Var}[X]} = \mathrm{Var}[Y]\left(1 - \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)^2}{\mathrm{Var}[X]\,\mathrm{Var}[Y]}\right) \\ &= \mathrm{Var}[Y](1-\varrho^2).\end{aligned} \tag{1}$$

c) Das Verhältnis des mittleren quadratischen Prognosefehlers in b) zu demjenigen aus a) ist $1-\varrho^2$. Bei unkorrelierten X und Y ($\varrho = 0$) bringt der Einbezug von X in die Prognose also nichts, bei vollständig korrelierten Zufallsvariablen ist sogar eine fehlerfreie Prognose möglich, wenn auf X abgestützt wird.

Siehe nächstes Blatt!

d) $\Rightarrow$: Aus Gleichung (1) sehen wir dass wir α und β so wählen können, dass $\mathbb{E}[(Y-(\alpha X+\beta))^2] = \mathrm{Var}[Y](1-\varrho^2)$ gilt, falls $|\varrho| = 1$ gilt, folgt daraus $\mathbb{E}[(Y-(\alpha X+\beta))^2] = 0$, also $Y-(\alpha X+\beta) \overset{\text{f.ü.}}{=} 0$. Wegen $\varrho = \pm 1$ ist $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$ und somit auch $\alpha \neq 0$.

$\Leftarrow$: $\varrho = \varrho(X,Y) = \varrho(X, \alpha X+\beta) = \frac{\mathrm{Cov}(X,\alpha X+\beta)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\,\mathrm{Var}[\alpha X+\beta]}} = \frac{\alpha\,\mathrm{Var}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\alpha^2\,\mathrm{Var}[X]}} = \mathrm{sign}(\alpha) = \pm 1$, wegen $\alpha \neq 0$.

3. a) Für $t > 0$

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{ta}) \underset{Chebyshev}{\leq} \mathbb{E}(e^{tX})e^{-ta} = M(t)e^{-ta}.$$

Für $t < 0$

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{ta}) \underset{Chebyshev}{\leq} \mathbb{E}(e^{tX})e^{-ta} = M(t)e^{-ta}.$$

b) Die Momenterzeugende Funktion von Z ist

$$\begin{aligned}
M(t) &= \mathbb{E}(e^{tZ}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} e^{-z^2/2} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z^2-2tz/2)} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-((z-t)^2/2+t^2/2)} dz \\
&= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-((z-t)^2/2)} dz \\
&= e^{t^2/2}.
\end{aligned}$$

Von teil a) und $M(t) = e^{t^2/2}$,

$$\mathbb{P}(Z \geq a) \leq e^{-ta} e^{t^2/2}$$

für $t > 0$. Setzen $t = a$, dann gilt

$$\mathbb{P}(Z \geq a) \leq e^{-a^2/2}.$$