ETH Zürich FS 2018
D-MATH
Prof. Dr. J. Teichmann

Koordinator
Vincenzo Ignazio

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Musterlösung Serie 9

1. Wir zeigen zuerst, dass das starke Gesetz der grossen Zahlen nicht gilt. Betrachte die Ereignisse $A_n = \{|X_n| \geq n\}, n \geq 2$. Dann gilt

$$P[A_n] = 1/(n \log n) \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} P[A_n] = \infty.$$

Aus der Divergenz der Reihe und der Unabhängigkeit der X_i, folgt mit dem zweiten Teil des Borel-Cantelli Lemmas, dass die Ereignisse A_n unendlich oft eintreten mit Wahrscheinlichkeit 1. Wenn das starke Gesetz gelten würde, müsste $S_n/n \to 0, P$-f.s. Dann müsste es zu fast jedem ω und jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\omega, \varepsilon)$ geben, so dass wenn $n \geq n_0$, dann $|S_n(\omega)| \leq n\varepsilon$. Dann folgt aber, für $n \geq n_0$: $|X_{n+1}| \leq |S_{n+1}| + |S_n| \leq (n+1)\varepsilon + n\varepsilon \leq 2(n+1)\varepsilon$. Dies ist aber ein Widerspruch zu dem unendlich oft Eintreten der A_n.

Wir zeigen jetzt, dass das schwache Gesetz der grossen Zahlen gilt. Es gilt: $\mathrm{Var}(X_k) = k/\log k$. Da die Funktion $x/\log x$ ein lokales Minimum bei $x = e$ hat, erhalten wir mit der Chebychev Ungleichung für $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} P[|S_n/n| \geq \varepsilon] &\leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{k=2}^{n} \mathrm{Var}(X_k) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \Big(\frac{2}{\log 2} + \sum_{k=3}^{n} (k/\log k) \Big) \\ &\leq \frac{2}{\varepsilon^2 n^2 \log 2} + \frac{(n-3)n}{\varepsilon^2 n^2 \log(n)} \to 0,\ n \to \infty. \end{aligned}$$

2. Betrachte $X_1, X_2, \ldots$ iid mit $X_i \sim \mathrm{POIS}(1)$. Insbesondere gilt $\mu = E[X_1] = 1 = \mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2$. Aussderdem ist $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ wieder Poisson verteilt mit Parameter n. Wegen des zentralen Grenzwertsatzes folgt

$$\begin{aligned} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} e^{-n} \frac{n^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} P[S_n = k] = P[S_n \leq n] \\ &= P\left[\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \right] = P\left[\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq 0 \right] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. **a)** Es gelten

-

- $\varphi_X(0) = \mathbb{E}[e^0] = \mathbb{E}[1] = 1$ und
- $|\varphi_X(t)| = \left|\mathbb{E}[e^{itX}]\right| \leq \mathbb{E}[\left|e^{itX}\right|] = \mathbb{E}[1] = 1.$
- Stetigkeit von φ_X: sei (t_n) ein Folge in $\mathbb{R}$ die gegen $t \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann konvergiert die Funktionenfolge $f_n(x) := e^{it_n x}$ punktweise gegen $f(x) := e^{itx}$, da die konstante Funktion 1 eine integrierbare Majorante für (f_n) darstellt, können wir den Satz der dominierten Konvergenz anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\varphi_X(t_n) &= \int e^{it_n x}\,\mu(dx)\\ &= \int f_n(x)\,\mu(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f(x)\,\mu(dx) = \int e^{itx}\,\mu(dx) = \varphi_X(t).\end{aligned}$$

- Schliesslich gilt noch

$$\varphi_{aX+b}(t) = \mathbb{E}[e^{it(aX+b)}] = e^{itb}\mathbb{E}[e^{itaX}] = e^{itb}\varphi_X(at).$$

b) Offensichtlich gilt die Aussage für $k = 0$, nehmen wir also an die Aussage gilt für beliebiges $k < n$, dann müssen wir zeigen, dass sie auch für $k+1$ gilt. Zunächst machen wir die Abschätzung

$$\left|i^k x^k \frac{e^{i(t+h)x} - e^{itx}}{h}\right| = \left|i^k x^{k+1} e^{itx} \frac{e^{ihx} - 1}{hx}\right| = \underbrace{\left|i^k e^{itx}\right|}_{=1} |x|^{k+1} \underbrace{\left|\frac{e^{ihx} - 1}{hx}\right|}_{\leq 1} \leq |x|^{k+1},$$

wegen $\mathbb{E}[|X|^{k+1}] \leq \mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ ist also $|X|^{k+1}$ eine integrierbare Majorante für jede beliebige Funktionenfolge $f_n(\omega) := \left|i^k X(\omega)^k \frac{e^{i(t+h_n)X(\omega)} - e^{itX(\omega)}}{h_n}\right|$, sei (h_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ die gegen 0 konvergiert, mit der Linearität des Erwartungswertes und dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt dann für beliebiges $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\frac{\varphi_X^{(k)}(t+h_n) - \varphi_X^{(k)}(t)}{h_n} = \frac{i^k\mathbb{E}[X^k e^{i(t+h_n)X}] - i^k\mathbb{E}[X^k e^{itX}]}{h_n}\\ &= \mathbb{E}\left[\underbrace{i^k X^k \frac{e^{i(t+h_n)X} - e^{itX}}{h_n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} i^k X^k \frac{d}{dt} e^{itX} = i^{k+1} X^{k+1} e^{itX}}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[i^{k+1} X^{k+1} e^{itX}] = i^{k+1}\mathbb{E}[X^{k+1} e^{itX}],\end{aligned}$$

d.h. $\varphi^{(k)}$ ist differenzierbar mit Ableitung $\varphi^{(k+1)}(t) = i^{k+1}\mathbb{E}[X^{k+1}e^{itX}]$.

c) Sei Y eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable. Dann ist

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itY}] = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}}}_{=f_Y(y)} e^{ity} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{\frac{-x^2}{2}} dx,$$

Siehe nächstes Blatt!

wobei die letzte Gleichheit aus $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ und der Tatsache dass der sin ungerade ist folgt. φ_Y ist nach t differenzierbar und wir dürfen die Ableitung (nach 3/b) in das Integral hineinziehen, da die Normalverteilung endliches erstes Moment hat. Wir differenzieren nach t und integrieren dann partiell nach x,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\varphi_Y'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\sin(tx)}_{=:u} \underbrace{(-x)e^{\frac{-x^2}{2}}}_{=:v'} dx \\
&= \underbrace{\sin(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\cos(tx)t}_{=u'} \underbrace{e^{\frac{-x^2}{2}}}_{=v} dx \\
&= -\sqrt{2\pi} t \varphi_Y(t),
\end{aligned}$$

und somit $\frac{\varphi_Y'(t)}{\varphi_Y(t)} = -t$, beide Seiten von 0 bis t integrieren ergibt einerseits

$$\int_0^t \frac{\varphi_Y'(s)}{\varphi_Y(s)} ds = \int_0^t \frac{d}{ds} \log(\varphi_y(s)) ds = \log(\varphi_Y(t)) - \underbrace{\log(\varphi_Y(0))}_{=0} = \log(\varphi_Y(t))$$

sowie andererseits $\int_0^t -s ds = -\frac{t^2}{2}$, insgesamt folgt

$$\varphi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

4. a)

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \mathbb{E}[e^{itx}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} \cdot e^{itx} dx \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{x(it+\lambda)} dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} e^{-x(it-\lambda)} dx \\
&= \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{it+\lambda} + \frac{1}{\lambda - it} \right) \\
&= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}.
\end{aligned}$$

-

b)

$$
\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \mathbb{E}[e^{itx}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(1-|x|)1_{[-1,1]}(x)dx \\
&= \int_{-1}^{1} e^{itx}dx + \int_{-1}^{0} xe^{itx}dx - \int_{0}^{1} xe^{itx}dx \\
&= \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{it}\right) + \left(\frac{1}{t^2} + \frac{e^{-it}}{it} - \frac{e^{-it}}{t^2}\right) - \left(\frac{e^{it}}{it} + \frac{e^{it}}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right) \\
&= \frac{2}{t^2}(1-\cos(t)).
\end{aligned}
$$

5. Wir betrachten $X, Y \sim$ iid Cauchy.

Aus der Dichte folgt mit dem Residuensatz

$$E[e^{iuX}] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\,\frac{1}{1+x^2}\,dx = e^{-|u|}. \tag{1}$$

Daraus kann nun die charakteristische Funktion von $(X+Y)/2$ berechnet werden:

$$E[e^{iu(X+Y)/2}] = E[e^{iuX/2}\,e^{iuY/2}] = E[e^{iuX/2}]\,E[e^{iuY/2}] = e^{-|u|}.$$

Aus der Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion folgt nun, dass $(X+Y)/2 \sim$ Cauchy-verteilt ist.