Musterlösung 11

1. **a)** Seien $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ und $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Da alle X_i unabhängig sind, ist die gemeinsame Dichte von $\underline{X}$ das Produkt der Dichten der X_i, und die Log-Likelihood-Funktion ist dann

$$l(\underline{x}) = \log\Big(\prod_{i=1}^{n}(\vartheta - 1)x_i^{-\vartheta}\Big) = n\log(\vartheta - 1) - \vartheta\sum_{i=1}^{n}\log x_i\,.$$

Ableiten und Nullsetzen liefert $n/(\vartheta - 1) = \sum_{i=1}^{n}\log x_i$. Der Maximum-Likelihood-Schätzer ist

$$T_n(\underline{X}) = 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\log X_i} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i}\,.$$

b) **Schwache Konsistenz:** Zu zeigen ist für jedes $\epsilon > 0$:

$$P[\,|T_n(\underline{X}) - \vartheta\,| > \epsilon\,] = P\Big[\Big|\,\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i} - (\vartheta - 1)\Big| > \epsilon\Big] \to 0 \;\;\forall\vartheta \;\;(n \to \infty)$$

Nun ist $\log X_i \sim \mathrm{Exp}(\vartheta - 1)$ (nachrechnen!) mit Erwartungswert $\frac{1}{\vartheta-1}$. Bei der Exponentialverteilung existieren alle für das starke Gesetz der grossen Zahlen notwendigen Momente. Also konvergiert $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i$ fast sicher gegen $\frac{1}{\vartheta-1}$ und damit der Betrag in der obigen Zeile fast sicher gegen 0. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Bemerkung: Man kann auch mit dem schwachen Gesetz der grossen Zahlen argumentieren. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i$ konvergiert dann in Wahrscheinlichkeit gegen $\frac{1}{\vartheta-1}$. Konvergenz in Wahrscheinlichkeit bleibt aber unter stetigen Transformationen f (hier: $f(x) = x^{-1}$) erhalten:

Da f stetig ist, existiert für jedes ϵ ein $\tilde{\epsilon}$ mit $|f(X_i) - f(X)| \le \epsilon$ für alle $|X_i - X| \le \tilde{\epsilon}$. Also existiert für jedes ϵ ein $\tilde{\epsilon}$ mit $P[|f(X_i) - f(X)| \le \epsilon] \ge P[|X_i - X| \le \tilde{\epsilon}]$. Wegen $X_i \to X$ stochastisch existiert aber für jedes $\tilde{\epsilon}$ – insbesondere für obiges – und für jedes $\delta > 0$ ein i_0 mit $P[|X_i - X| > \tilde{\epsilon}] \le \delta$ bzw. $P[|X_i - X| \le \tilde{\epsilon}] \ge 1 - \delta$ für alle $i \ge i_0$. Zusammengefasst: Zu jedem ϵ und jedem δ existieren ein $\tilde{\epsilon}$ und ein i_0 mit $P[|f(X_i) - f(X)| \le \epsilon] \ge P[|X_i - X| \le \tilde{\epsilon}] \ge 1 - \delta$ für alle $i \ge i_0$. Oder ohne das $\tilde{\epsilon}$ ausgedrückt: Zu jedem ϵ und jedem δ existiert ein i_0 mit $P[|f(X_i) - f(X)| \le \epsilon] \ge 1 - \delta$ bzw. $P[|f(X_i) - f(X)| > \epsilon] \le \delta$ für alle $i \ge i_0$. Das bedeutet Konvergenz in Wahrscheinlichkeit für $f(X_i)$.

Wem beide Wege nicht zusagen, der kann den Beweis auch mit der Ungleichung von Čebyšev führen. . . .

Starke Konsistenz: Zu zeigen ist:

$$P[\,T_n(\underline{X}) \to \vartheta\,] = P\Big[\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i} \to \vartheta - 1\Big] = 1 \;\;\forall\vartheta$$

Wie oben erklärt, gemäss dem starken Gesetz der grossen Zahlen konvergiert $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i$ fast sicher gegen $\frac{1}{\vartheta-1} \neq 0$, deshalb auch die Inverse gegen $\vartheta - 1$ f.s. konvergiert.

2. **a)** Wir behandeln gleich den allgemeinen Fall der uniformen Verteilung auf $[a, b]$ und bestimmen den Maximum-Likelihood Schätzer für die Parameter a und b. Die gemeinsame Dichte von $X_1, \dots, X_n$ ist gleich

$$f_X^{a,b}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(b-a)^n}\prod_{i=1}^{n}1_{[a,b]}(x_i). \tag{1}$$

Nun muss $f_X^{a,b}(x_1, \dots, x_n)$ für feste $(x_1, \dots, x_n)$ bezüglich a und b maximiert werden. Seien $x_* := \min_{1\le i\le n} x_i$ und $x^* := \max_{1\le i\le n} x_i$. Falls x_* oder x^* ausserhalb $[a, b]$ liegen, dann verschwindet die rechte Seite von (1). Also muss die Maximumstelle $(\hat{a}_{\mathrm{ML}}, \hat{b}_{\mathrm{ML}})$ die Bedingungen

Please turn the page!

$\hat{b}_{\mathrm{ML}} \geq x^* \geq x_* \geq \hat{a}_{\mathrm{ML}}$ erfüllen. Für $\hat{a}_{\mathrm{ML}} := x_* = \min_{1\leq i\leq n} x_i$ und $\hat{b}_{\mathrm{ML}} := x^* = \max_{1\leq i\leq n} x_i$ ist $f_X^{a,b} < f_X^{\hat{a}_{\mathrm{ML}},\hat{b}_{\mathrm{ML}}}$ für alle a, b. Somit sind dies die Maximum-Likelihood Schätzungen für a und b.

Der Maximum-Likelihood Schätzer für θ ist somit gegeben durch $T_n := X^* := \max(X_1,\ldots,X_n)$, diese Zufallsvariable ist nach oben beschränkt durch θ, falls also die Varianz nicht verschwindet, muss der Erwartungswert von T_n echt kleiner als θ sein.

b) Die Verteilungsfunktion von T_n ist

$$F_{T_n}(t) = P(X^* \leq t) = P(X_i \leq t \quad \forall i = 1\ldots n) \overset{\text{iid}}{=} \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \qquad \text{für} \quad t \in [0,\theta]$$

Durch ableiten erhält man die Dichtefunktion $n\frac{1}{\theta^n}t^{n-1}1_{[0,\theta]}$. Damit cT_n erwartungstreu wird muss gelten

$$\begin{aligned}\theta = \mathbb{E}\left[cT_n\right] &= \int_0^\theta ctn\frac{1}{\theta^n}t^{n-1}\,dt = cn\frac{1}{\theta^n}\int_0^\theta t^n\,dt = cn\frac{1}{\theta^n}\left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_{t=0}^{\theta}\\ &= c\frac{1}{\theta^n}\frac{n}{n+1}\theta^{n+1} = c\frac{n}{n+1}\theta,\end{aligned}$$

woraus sich sofort $c = \frac{n+1}{n}$ ergibt.

c) Wir berechnen zuerst

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[c^2T_n^2\right] = \int_0^\theta c^2t^2n\frac{1}{\theta^n}t^{n-1}\,dt &= c^2n\frac{1}{\theta^n}\int_0^\theta t^{n+1}\,dt = c^2n\frac{1}{\theta^n}\left.\frac{t^{n+2}}{n+2}\right|_0^\theta\\ &= c^2n\frac{1}{\theta^n}\frac{n}{n+2}\theta^{n+2} = c^2\frac{n}{n+2}\theta^2,\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(cT_n\right) &= \mathbb{E}\left[c^2T_n^2\right] - \mathbb{E}\left[cT_n\right]^2 = c^2\frac{n}{n+2}\theta^2 - c^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\theta^2\\ &= c^2\theta^2\left(\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}\right) = c^2\theta^2\left(\frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2}\right)\\ &= c^2\theta^2\left(\frac{n^3+2n^2+n-(n^3+2n^2)}{(n+2)(n+1)^2}\right) = c^2\theta^2\left(\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\right),\end{aligned}$$

geht also mit $\frac{1}{n^2}$ gegen 0, für $c = \frac{n+1}{n}$ ergibt sich $\mathrm{Var}\left(cT_n\right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$.

d) $\mathbb{E}\left[(\right] X_i) = \theta/2$ also der Moment-Schätzer ist $\hat{\theta}_{\mathrm{MM}} = 2\bar{X}$.

3. Sei X die Anzahl markierter Fische im zweiten Fang. Beobachtet wurde $X = 3$. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, das wir beobachtet haben, hängt in folgender Weise von N ab: Es ist

$$P_N[X=3] = \frac{\binom{N-5}{8}\binom{5}{3}}{\binom{N}{11}} = \frac{9900\,(N-5)!\,(N-11)!}{(N-13)!\,N!} =: g(N).$$

Der Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{N}_{\mathrm{ML}}$ für N ist so zu wählen, dass $g(N)$ für $N = \widehat{N}_{\mathrm{ML}}$ maximal wird. Wir müssen also die Maximumstelle der Funktion g bestimmen. Wegen

$$\frac{g(N+1)}{g(N)} = \frac{(N-4)(N-10)}{(N-12)(N+1)}\begin{cases} >1 & \text{falls } N \leq 17\\ <1 & \text{falls } N \geq 18\end{cases}$$

ist $g(18)$ maximal. $\widehat{N}_{\mathrm{ML}} = 18$ ist also der Maximum-Likelihood-Schätzer für N.