Serie 1

1. Drücke die folgenden Ereignisse mit Hilfe der Ereignisse A, B und C aus, wobei die Symbole A, B, C, $(\ )$, $\cap$, $\cup$, ^{c} verwendet werden dürfen.

D_1 = „Mindestens eines der Ereignisse A, B oder C tritt ein."
D_2 = „Höchstens eines der Ereignisse A, B oder C tritt ein."
D_3 = „Weder A noch B noch C tritt ein."
D_4 = „Mindestens eines der Ereignisse A, B oder C tritt nicht ein."
D_5 = „Genau eines der drei Ereignisse A, B oder C tritt ein."
D_6 = „A kann nur dann eintreten, wenn weder B noch C eintritt."
D_7 = „Falls A nicht eintritt, tritt B auch nicht ein."
D_8 = „Falls D_7 eintritt, tritt auch B ein."

2. Wir werfen gleichzeitig einen roten und einen grünen Würfel und betrachten die folgenden Ereignisse:

W_1 = „Keine der beiden gewürfelten Zahlen ist grösser als 2."
W_2 = „Der rote Würfel zeigt dieselbe Zahl wie der grüne Würfel."
W_3 = „Die Zahl auf dem roten Würfel ist das Doppelte der Zahl auf dem grünen Würfel."
W_4 = „Die Zahl auf dem roten Würfel ist um eins grösser oder kleiner als die Zahl auf dem grünen Würfel."
W_5 = „Wenn die Zahl auf dem roten Würfel höchstens 5 ist, zeigt der grüne Würfel eine 6."

Wählen Sie einen geeigneten Grundraum Ω und identifizieren Sie die obigen Ereignisse mit Teilmengen von Ω. Von welchen der obigen Ereignisse kann man entscheiden, ob sie eintreten, wenn man das Würfeln zwar beobachtet, aber farbenblind ist, so dass man rot und grün nicht unterscheiden kann?

Bitte wenden!

3. Hypergeometrische Verteilung und Binomialverteilung

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$ falls

- X binomial verteilt ist:

$$P_1[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- X hypergeometrisch verteilt ist:

$$P_2[X = k] = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

b) Bestimmen Sie $\operatorname{var}(X) \stackrel{def}{=} E[X^2] - (E[X])^2$ für beide Verteilungen, indem Sie zuerst
$E[X(X-1)]$ berechnen.

c) Zeigen Sie, dass $P_2[X = k] \to P_1[X = k]$ gilt, falls $N \to \infty$, $K \to \infty$ und $K/N \to p$. (Interpretation: bei einer grossen Population (N) gibt es praktisch keinen Unterschied zwischen Ziehen mit und ohne Zurücklegen.)

4. M identische Kugeln werden auf zufällige Weise in N Löcher gerollt.

a) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in das erste Loch k_1 Kugeln, in das zweite k_2 Kugeln usw., in das N-te Loch k_N Kugeln rollen.

b) Welche ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in eins der Löcher (gleichgültig in welches) k_1 Kugeln, in ein anderes k_2 Kugeln usw. rollen (wobei $k_1, ..., k_N$ paarweise verschieden sind)?

c) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den N Löcher l_0 solche gibt, in die keine Kugel; l_1 solche, in die genau eine Kugel usw.; l_M solche, in die alle M Kugeln rollen.

Abgabe: Dienstag, den 27.02.2018 in der Übungsstunde.