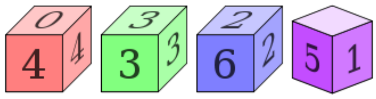
D-MATH Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik FS18

Prof. J. Teichmann

Serie 4



1. (Efrons Würfel)

Vier Würfel A, B, C und D haben folgende Augenzahlen auf ihren jeweils sechs Seiten:

A: 4, 4, 4, 4, 0, 0
B: 3, 3, 3, 3, 3, 3
C: 6, 6, 2, 2, 2, 2
D: 5, 5, 5, 1, 1, 1

a) Betrachte A, B, C, D als unabhängige Zufallsvariablen und berechne $\mathbb{P}(A > B)$, $\mathbb{P}(B > C)$, $\mathbb{P}(C > D)$ und $\mathbb{P}(D > A)$.

b) Efron will mit dir Würfel spielen, wobei jeder Spieler einen Würfel auswählt und danach der Spieler, der häufiger eine grössere Zahl wirft, gewinnt. Möchtest du als erster einen Würfel auswählen oder lässt du lieber Efron der Vortritt?

2. Ein Nachrichtenkanal überträgt binäre Codewörter zu je 1024 Bits. Die einzelnen Bits werden unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p = 10^{-3}$ falsch übertragen. Ein Wort wird *genau dann* richtig decodiert, *wenn* es höchstens drei falsch übermittelte Bits enthält. Es bezeichne X die Anzahl falsch übertragener Bits in einem Codewort.

a) Welche Verteilung besitzt X?

b) Berechnen Sie die exakte Wahrscheinlichkeit, dass ein Codewort richtig decodiert wird. Vergleichen Sie diese mit dem Ergebnis wenn man eine passende Approximation der Verteilung von X verwendet.

c) Eine Meldung bestehend aus 10 Wörtern wird übermittelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Wort falsch decodiert wird.

Bitte wenden!

3. Sei X geometrisch verteilt, das heisst $\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^k p$. Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion *(probability generating function)* ist definiert als

$$G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(X = k)$$

a) Berechne $G_X(z)$. Für welche $z \in \mathbb{R}$ ist $G_X(z)$ definiert?

b) Was ist $G_X(0)$ und $G_X(1)$?

c) Berechne $G'_X(z)|_{z=1}$. Was ist das?

Abgabe: Dienstag, den 20.3.2018 in der Übungsstunde.