Serie 5

1. Das Ruinproblem. Arno und Benno spielen folgendes Spiel: In jeder Runde wird eine faire Münze geworfen. Erscheint Kopf, so zahlt Benno einen Franken an Arno, und umgekehrt bei Zahl. Arnos bzw. Bennos Vermögen vor der ersten Runde beläuft sich auf a bzw. b Franken (a, $b \in \mathbb{N}$). Das Spiel geht zu Ende, wenn einer der beiden kein Geld mehr hat, spätestens aber nach n Runden. p_n bzw. q_n bezeichne die Wahrscheinlichkeit, dass Arno bzw. Benno nach diesem Spiel ruiniert ist.

a) Zeige: $\lim_{n\to\infty}(p_n + q_n) = 1$.

b) Berechne den Grenzwert $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

Hinweis: Betrachte Arnos erwarteten Gewinn nach n Runden.

2. Sei $\mathcal{F}$ die Mengen-Algebra gegeben durch die endlichen und koendlichen Teilmengen von einem unendlichen Ereignisraum Ω, das heisst

$$\mathcal{F} := \{A \subset \Omega : |A| < \aleph_0 \quad \text{oder} \quad |A^c| < \aleph_0\} \qquad \text{wobei } \aleph_0 = |\mathbb{N}|.$$

$\mathbb{P}$ ist definiert auf $\mathcal{F}$ als

$$\mathbb{P}(A) := \mathbb{I}\{|A^c| < \aleph_0\} = \begin{cases} 0 & A \text{ ist endlich} \\ 1 & A^c \text{ ist endlich.} \end{cases}$$

Beweise:

a) $\mathbb{P}$ ist endlich additiv;

b) $\mathbb{P}$ ist *nicht* abzählbar additiv wenn Ω abzählbar ist;

c) $\mathbb{P}$ ist abzählbar additiv wenn Ω überabzählbar ist.

Sei nun $\mathcal{F}$ die σ-Algebra gegeben durch die abzählbaren und koabzählbaren (d.h. das Komplement ist abzählbar) Teilmengen von einem überabzählbaren Ω.
Wir definieren $\mathbb{P}(A) := \mathbb{I}\{|A^c| \leq \aleph_0\} = \mathbb{I}\{A^c \text{ ist abzählbar}\}$.

d) Beweise, dass $\mathbb{P}$ abzählbar additiv ist.

Bitte wenden!

3. Es bezeichne $\mathcal{A}$ eine nicht leere Menge von Teilmengen von Ω. Beweise: Es existiert eine eindeutige kleinste σ-Algebra, die alle Teilmengen von $\mathcal{A}$ enthält.

Bemerkung: Diese σ-Algebra heisst die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra und wird häufig mit $\sigma(\mathcal{A})$ bezeichnet. "Kleinste σ-Algebra" bedeuted hier, dass jede σ-Algebra, die die Mengen von $\mathcal{A}$ enthält, auch die von $\sigma(\mathcal{A})$ enthalten muss:

$$\sigma(\mathcal{A}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}}} \mathcal{B}$$

4. Für $s \in (1, \infty)$ ist die **Riemann'sche Zetafunktion** gegeben durch die konvergente Reihe $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Wir wollen

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - p_i^{-s}\right)} \qquad (s \in (1, \infty))$$

zeigen, wobei $p_1, p_2, p_3, \ldots = 2, 3, 5, \ldots$ eine Durchnummerierung der Primzahlen darstellt.

Sei $s \in (1, \infty)$ fix:

a) Zeige, dass $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(N) := \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in N} \frac{1}{n^s}$ $(N \subseteq \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.

b) Sei p eine Primzahl und $N_p := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist teilbar durch } p\}$. Berechne $\mathbb{P}(N_p)$.

c) Zeige, die Familie $(N_p)_{p \text{ prim}}$ von Ereignissen ist unabhängig.

d) Berechne

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{p \text{ prim}} N_p^c\Big)$$

mit Hilfe von c) und der Stetigkeitseigenschaft von $\mathbb{P}$ (Satz 3.1 im Skript), und folgere daraus

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - p_i^{-s}\right)}.$$

Abgabe: Dienstag, den 27.3.2012 in der Übungsstunde.