Serie 6

1. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. $A_i \in \mathcal{A},\ i \in \mathbb{N}$ entspreche dem Ereignis "im Zeitpunkt i tritt das Phänomen Ψ auf". Drücke mit Hilfe der A_i die folgenden Ereignisse als Mengen $A \in \mathcal{A}$ aus:

a) "Ψ tritt nie auf"

b) "Ψ tritt immer wieder auf"

c) "Ψ tritt schliesslich nicht mehr auf"

d) "Ψ tritt genau zweimal auf"

e) "Ψ tritt höchstens in ungeraden Zeitpunkten auf"

Welche dieser Ereignisse gehören zur asymptotischen σ-Algebra

$$\mathcal{A}^* := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma(\{A_k : k \geq n\})$$

2. Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge von Ereignissen.

a) Konstruiere ein Beispiel mit $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \infty$ und $\mathbb{P}(\cap_n \cup_{k \geq n} A_k) = 0$.

b) Seien nun die Ereignisse $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ unabhängig, mit $\mathbb{P}(A_n) < 1\ \forall n \in \mathbb{N}$. Beweise:

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(\limsup_{n \to \infty} A_n) = 1$$

3. Sei $C \in (0, \infty)$ und $0 \leq \lambda_n \leq C$. Ferner seien $X_n,\ n \in \mathbb{N}$, Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter λ_n, d.h. $P(X_n = k) = e^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^k}{k!}$. Zeige, dass

$$P(X_n \geq n \text{ für unendlich viele n }) = 0$$

gilt.

4. Ein Zufallsgenerator für die uniforme Verteilung auf $[0,1]$ liefert die folgenden 5 Werte: 0.353 0.101 0.455 0.918 0.285 . Generiere daraus

a) 5 Werte einer EXP(2)-verteilten Zufallsvariablen,

b) 5 Werte einer auf $\{1,\ldots,10\}$ gleichverteilten Zufallsvariablen,

c) 5 Werte einer POIS(1)-verteilten Zufallsvariablen.

Abgabe: Dienstag, den 10.4.2018 in der Übungsstunde.