D-MATH Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik FS18
Prof. J. Teichmann

Serie 7

1. Die Zufallsvariable X beschreibt die tägliche Arbeitszeit eines Ingenieurs in Stunden und hat folgende Dichte:

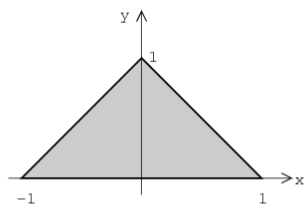
$$f(x) = \begin{cases} c(x-7)^2 & : \quad 7 \leq x \leq 10 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimme die Konstante c.

b) Berechne die Verteilungsfunktion von X.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen 8 und 9 Stunden einnimmt.

2. Die gemeinsame Dichte der beiden Zufallsvariablen X und Y sei konstant gleich c auf dem grauen Dreieck und 0 ausserhalb.



a) Bestimme die gemeinsame Dichtefunktion $f_{X,Y}$.

b) Bestimme die beiden Randdichten.

c) Bestimme $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y], \operatorname{Var}(X)$ und $\operatorname{Var}(Y)$.

d) Bestimme die Kovarianz von X und Y. Sind X und Y unabhängig? Begründe die Antwort.

3. Es seien X und Y Zufallsvariable mit der gemeinsamen Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x^2 y} & \text{falls } x \geq 1 \text{ und } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Warum ist $f_{X,Y}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

Bitte wenden!

b) Berechne die Randdichte von X.

c) Bestimme $P\left(Y \le \frac{1}{X^2}\right)$.

4. Ein Stab der Länge 1 wird zufällig so in zwei Teile zerbrochen, dass die Länge X des rechten Stabteiles gleichverteilt auf dem Einheitsintervall ist. Danach wird ein anderer gleicher Stab an genau der gleichen Stelle gebrochen. Aus den insgesamt vier Teilen lässt sich ein Rechteck formen. Bestimme Verteilungsfunktion, Dichtefunktion, Erwartungswert und die Varianz des Flächeninhalts A dieses Rechtecks.

5. *Zusatzaugabe. Wird nicht korrigiert!

(Chernoff-Schranken.) Beweise den folgenden Satz:
Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i$ und $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p_i$. Dann gilt für $X := \sum_{i=1}^n X_i$ und $\mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$, sowie jedes $\delta > 0$, dass

$$\mathbb{P}(X \ge (1+\delta)\mu) \le \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu .$$

Für den Beweis benütze die folgende Teilschritte:

a) Schreibe die Markov-Ungleichung für die (positive) Zufallsvariable e^{tX} und Niveau $a := e^{t(1+\delta)\mu}$ (wobei $t > 0$) auf.
Hinweis: Markov-Ungleichung: $\mathbb{P}(|X| \ge a) \le \frac{\mathbb{E}[|X|]}{a}$

b) Ersetze X durch die Summe der X_i. Rechne den Erwartungswert explizit aus, unter der Beachtung dass die X_i unabhängig und Bernoulli-verteilt sind.

c) Ersetze die Grösse $1 + p_i(e^t - 1)$ mit eine obere Schranke (durch $1 + y \le e^y$), und vereinfache.

d) Finde t so dass die obere Schranke minimal ist. Ersetze diesen Wert, um den Beweis zu beenden.

Betrachte n Würfe einer fairen Münze. Berechne obere Schranken (sowohl Chebyshev als auch Chernoff) für die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Erfolge (Köpfe) mindestens 10% grösser ist als der Mittelwert, falls $n = 10^3$ und $n = 10^4$.

Hinweis: Da $p = 1/2$, da die Verteilung symmetrisch ist.

Abgabe: Dienstag, den 17.4.2018 in der Übungsstunde.