ETH Zürich FS 2018
D-MATH
Prof. Dr. J. Teichmann

Koordinator
Vincenzo Ignazio

Wahrscheinlichkeit & Statistik
Serie 8

1. Es seien X und Y unabhängige, $\mathcal{N}(0,1)$ - verteilte Zufallsvariablen. Wir betrachten die Zufallsvariable Z, welche definiert ist als

$$Z := \operatorname{sign}(Y) \cdot X = \begin{cases} X & \text{falls } Y > 0, \\ -X & \text{falls } Y \leq 0. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Verteilung von Z.

b) Berechnen Sie die Korrelation von X und Z.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X + Z = 0)$.

d) Sind X und Z unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort durch ein präzises mathematisches Argument.

2. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$ und $\mathrm{Var}[X] > 0$. Die Korrelation von X und Y sei mit $\varrho := \varrho(X, Y)$ bezeichnet. Wir wollen Y vorhersagen, einerseits mit einer Konstanten β und andererseits mit einer linearen Funktion $\alpha X + \beta$. Dabei wollen wir, dass der mittlere quadratische Fehler $\mathbb{E}[(Y - \text{Prognose})^2]$ minimal wird.

a) Bestimme β so, dass $\mathbb{E}[(Y - \beta)^2]$ minimal wird und gib das zugehörige Minimum an.

b) Bestimme α und β so, dass $\mathbb{E}[(Y - (\alpha X + \beta))^2]$ minimal wird und gib auch hier das zugehörige Minimum an.

c) Zeige, dass das Verhältnis $\frac{\text{Minima b)}}{\text{Minima a)}}$ gegeben ist durch $1 - \varrho^2$. Wie ist dieses Ergebnis zu interpretieren bzw. wann macht es Sinn die Zufallsvariable X in die Prognose für Y einzubeziehen?

d) Folgere aus Punkt b):

$$|\varrho| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{R} \ \ Y \overset{\text{f.ü.}}{=} \alpha X + \beta.$$

Bitte wenden!

3. **a)** Sei X eine Zufallsvariable mit Momenterzeugende Funktion $M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$. Zeigen Sie dass

Für $t > 0$

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-ta} M(t),$$

und für $t < 0$

$$\mathbb{P}(x \leq a) \leq e^{-ta} M(t).$$

b) Betrachten Sie eine Normalverteilte Zufallsvariable $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Zeigen Sie dass

$$\mathbb{P}(Z \geq a) \leq e^{-a^2/2}, \text{ für } a > 0$$

und

$$\mathbb{P}(Z \leq a) \leq e^{-a^2/2}, \text{ für } a < 0.$$

Abgabe: Dienstag 24.04.2018 in der Übungsstunde