ETH Zürich FS 2018
D-MATH
Prof. Dr. J. Teichmann

Koordinator
Vincenzo Ignazio

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 9

1. Seien $X_2, X_3, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n\log n}$ und $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}$, $n = 2, 3, \dots$. Zeige, dass die Folge $(X_n)_{n\geq 2}$ das schwache, aber nicht das starke Gesetz der grossen Zahlen erfüllt.

2. Berechne mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Hinweis: Betrachte i.i.d. Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ mit $X_i \sim \mathrm{POIS}(1)$ und setze $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

3. Sei X eine reelwertige Zufallsvariable. Wir definieren die *charakteristische Funktion von X* durch

$$\begin{aligned} \varphi_X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \varphi_X(t) := \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \int e^{itx}\, \mu(dx), \end{aligned}$$

wobei μ die Verteilung von X ist (die letzte Gleichung folgt aus dem Transformationssatz für Maße). Sie stellt ein wichtiges analytisches Hilfsmittel dar, welches die Verteilung einer Zufallsvariable eindeutig bestimmt (charakterisiert).

a) Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

- $\varphi_X(0) = 1$,
- $|\varphi_X(t)| \leq 1$,
- φ_X ist stetig, und
- $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass falls das n-te Moment von X existiert, d.h. $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$, dann ist φ_X n-mal differenzierbar, und für alle $k \leq n$ gilt

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}\left[X^k e^{itX}\right]$$

Bitte wenden!

(insbesondere $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\left[X^k\right]$).

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage durch Induktion, verwenden Sie dabei $\left|\frac{e^{i\alpha}-1}{\alpha}\right| \leq 1$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) und den Satz von der dominierten Konvergenz.

c) Leiten Sie eine Differentialgleichung her für die charakteristische Funktion φ der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung unter Verwendung von b) und partieller Integration, und berechnen Sie daraus φ.

4. Berechnen der charakteristischen Funktion der folgenden Zufallsvariablen.

a) Für eine Laplace-verteilte Zufallsvariable X,

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

b) Für eine Zufallsvariable mit Dreiecksverteilung:

$$f(x) = (1 - |x|) 1_{[-1,1]}(x).$$

5. Eine Cauchy-verteilte Zufallsvariable, $X \sim$ Cauchy, hat die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

Sei nun $X, Y \sim$ iid Cauchy. Zeige: $(X+Y)/2 \sim$ Cauchy.

Abgabe: 08.05.2018, in der Uebungsstunde