

## Serie 12

1. Einer Gruppe von 20 Tennisspielern mittleren Niveaus werden je zwei Tennisschläger zum Testen ausgehändigt. Einer der Schläger ist jeweils mit einer Nylon-Saite bespannt, der andere mit einer synthetischen Darm-Saite. Nach einigen Wochen Testzeit wird jeder Spieler gefragt, ob er Nylon- oder Darm-Saiten bevorzugt. Es sei  $p$  der Anteil aller Tennisspieler mittleren Niveaus, die Darm-Saiten bevorzugen und  $X$  sei die Anzahl der Spieler unter den 20 Testspielern die Darm-Saiten bevorzugen. Da Darm-Saiten teurer sind als Nylon-Saiten, betrachten wir die Nullhypothese, dass höchstens die Hälfte der Spieler Darm-Saiten bevorzugt. Wir vereinfachen dies zu  $H_0 : p = 0.5$  und werden  $H_0$  nur ablehnen, falls der Versuchsausgang eindeutig Darm-Saiten bevorzugt.
  - a) Welcher der Verwerfungsbereiche  $\{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ ,  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  oder  $\{0, 1, 2, 3, 17, 18, 19, 20\}$  ist am ehesten angemessen und warum sind die zwei anderen es nicht?
  - b) Was ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers erster Art für den gewählten Bereich in a)? Erhält man mit diesem Bereich einen Test zum Level  $\alpha = 0.05$ ? Ist dies der beste Test zum Niveau  $\alpha$ ?
  - c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zweiter Art für den Verwerfungsbereich, den Sie in a) gewählt haben, falls  $p = p_1 = 0.6$  und falls  $p = p_2 = 0.8$ .
  - d) Berechnen Sie den P-Wert, falls  $X = 13$ . Wird  $H_0$  auf einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.10$  abgelehnt?
  
2. Hundert Würfe einer Münze haben sechzigmal Kopf ergeben. Kann diese Münze fair sein?  
*Hinweis: Benutze die Normalapproximation.*
  - a) Führe einen Test zum 1%-Niveau durch. Sollte dieser Test ein- oder zweiseitig sein?
  - b) Wie oft darf Kopf in hundert Würfeln höchstens auftreten, so dass wir die Annahme, dass die Münze fair ist, nicht verwerfen müssen?
  - c) Gib ein 95%-Vertrauensintervall für die Wahrscheinlichkeit an, in einem einzigen Wurf dieser Münze Kopf zu erhalten.

**Please turn the page!**

3. Eine Firma behauptet, dass ihr neues Betriebssystem "Doors XP" die Zugriffszeiten auf die Festplatte verkürzt. Herr User will diese Behauptung testen und erhält mit dem neuen Betriebssystem folgende Zugriffszeiten (in ms):

5.62, 5.71, 5.79, 5.65, 5.15, 5.69,

wobei er annimmt, dass die Zeiten normalverteilt sind. Ohne "Doors XP" war die Zugriffszeit erfahrungsgemäss 5.8 ms.

- a) Welchen Test wählt Herr User? Mit welcher Null- und Alternativhypothese arbeitet er? Führen Sie den Test zum 1%-Niveau durch.
- b) Ändert sich etwas am Testergebnis, wenn man die fünfte Beobachtung (5.15) durch 5.65 ersetzt? Wieso?
4. Eine Klimaanlage schafft es, die Raumtemperatur bis auf eine Standardabweichung von einem halben Grad Celsius konstant zu halten. Die angestrebte Raumtemperatur beträgt 20.00 Grad Celsius. An zehn aufeinanderfolgenden Tagen wurden die folgenden Temperaturen gemessen:

20.71, 19.76, 20.56, 21.39, 21.00, 19.67, 20.92, 20.31, 20.39, 20.72

- a) Nehmen Sie an, dass die gemessenen Temperaturen unabhängig voneinander und identisch normalverteilt sind, und führen Sie damit einen  $z$ -Test auf dem 5%-Niveau durch, um zu beurteilen, ob die Klimaanlage wirklich auf den Sollwert von 20.00 Grad geeicht ist.
- b) Welches ist das kleinste Niveau, auf dem der Test die Nullhypothese noch verwirft (d.h. der P-Wert)?
- c) Führen Sie nun einen Vorzeichenstest zum 5%-Niveau durch, um zu beurteilen, ob die Klimaanlage richtig geeicht ist. Wie lautet der zugehörige P-Wert? Wie lautet nun der Testentscheid?
5. Bei der Herstellung von Transistoren können folgende Fehler unabhängig voneinander auftreten

- A) Die Spannung ist nicht garantiert.
- B) Die Stromverstärkung liegt ausserhalb der Toleranzgrenze.

Fehler A tritt mit Wahrscheinlichkeit 10% und Fehler B mit Wahrscheinlichkeit 8% ein. Schon ein Fehler macht den Transistor unbrauchbar.

**Please turn the page!**

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Transistor unbrauchbar ist?
- b) Es werden 50 Transistoren zufällig gewählt. Wie ist die Anzahl der unbrauchbaren Transistoren verteilt?
- c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen 50 Transistoren höchstens 10 unbrauchbar sind? Verwende eine geeignete Approximation.
- d) Von einer neuen Herstellungsmethode wird behauptet, dass höchstens 12% der produzierten Transistoren fehlerhaft sind. Bei einer Kontrolle erhält man, dass von 100 Transistoren 16 unbrauchbar sind. Führe einen Test auf dem 1% Niveau durch ob man aufgrund dieser Beobachtung die Behauptung widerlegen kann. Gib auch Null- und Alternativhypothese an.
- e) Wie gross muss  $n$  mindestens sein, damit bei wahrem Wert  $p = 0.16$  der in d) durchgeführte Test einen Fehler 2. Art von maximal 10% hat.  
Hinweis: Ermittle zuerst den Verwerfungsbereich des Testes im allgemeinen Fall von  $n$  Transistoren.
6. a) In einer Nagelfabrik will man die Länge der produzierten Nägel möglichst genau schätzen. Man nimmt an, dass die Länge der Nägel  $X_i, i = 1, \dots, n$ , unabhängig normalverteilt sind mit Varianz  $1 \text{ mm}^2$  und unbekanntem Erwartungswert  $\mu$  mm. Wieviel Nägel muss man mindestens messen, damit das zweiseitige 95%-Vertrauensintervall für  $\mu$  höchstens Länge 0.5 mm hat?
- b) Wie oft muss man eine Münze werfen, damit das 95%-Vertrauensintervall für die Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  (Kopf wird als Erfolg interpretiert) höchstens Länge 0.01 hat?  
**Hinweis:** Benutzen Sie die Normalapproximation. Die Intervallgrenzen hängen noch von  $p$  ab. Maximieren Sie nun  $p(1 - p)$  über  $p$ .
7. Bei einem Gerät zur Messung von Luftschadstoffen soll überprüft werden, ob es die richtigen Werte angibt. Dazu werden in einen geschlossenen Raum 20 ppm CO gespeist und dann vom Gerät zehnmal gemessen. Die folgenden Konzentrationen (in ppm CO) werden abgelesen:

20.1, 20.3, 21.4, 19.2, 22.2, 20.1, 20.2, 20.4, 20.2, 20.3.

Kennzahlen:  $\bar{x} = 20.44$ ,  $s_x^2 = 0.660$ ,  $s_x = 0.813$

Die Messungen können in guter Näherung als normalverteilt angenommen werden.

**Please turn the page!**

- a) Formulieren Sie für die folgenden beiden Tests jeweils eine geeignete Nullhypothese und eine Alternative, und testen Sie auf dem 5%-Niveau. Achten Sie auf eine saubere Durchführung der Tests.
- i)  $t$ -Test
  - ii) Überlegen Sie, wie man die Nullhypothese ausserdem testen könnte, wenn die Genauigkeit  $\sigma = 0.800 \text{ ppm}$  des Messgeräts (d.h. eines Einzelwertes) bekannt ist.
- b) Berechnen Sie in beiden Fällen das zugehörige 95%-Vertrauensintervall.
8. Beim Testen von Milch auf bakteriologische Verunreinigungen wird  $0.01 \text{ ml}$  Milch über eine Glasfläche von  $1 \text{ cm}^2$  verteilt. Diese Fläche wird in 400 gleich grosse Quadrätchen unterteilt und die Bakterienkolonien darin unter dem Mikroskop ausgezählt worden. Man hat dabei die folgende Anzahl  $N_k$  von Quadrätchen mit genau  $k$  Kolonien gefunden:
- |       |    |     |    |    |    |    |   |   |   |   |    |    |
|-------|----|-----|----|----|----|----|---|---|---|---|----|----|
| $k$   | 0  | 1   | 2  | 3  | 4  | 5  | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 19 |
| $N_k$ | 56 | 104 | 80 | 62 | 42 | 27 | 9 | 9 | 5 | 3 | 2  | 1  |
- a) Eignet sich aufgrund des Versuchs die Poissonverteilung als Modell für die Anzahl Kolonien pro Quadrätchen oder eher nicht?
  - b) Gib eine Schätzung des Parameters  $\lambda$  der Poissonverteilung an, und beschreibe die erwartete Anzahl Quadrätchen mit  $k$  Kolonien, d.h.  $400 \cdot \mathbb{P}[X = k]$ .
  - c) Betrachte die Abweichungen der  $N_k$  von ihren Erwartungswert. Findest du, dass diese Schwankungen als zufällig betrachtet werden können, oder glaubst du, dass die Poissonverteilung hier nicht passt?

Um das Ganze genauer zu analysieren, führe einen Chi-Quadrat Anpassungstest durch und gehe dabei wie folgt vor:

- d) Formuliere eine geeignete Null- und Alternativhypothese.
- e) Berechne für die dort gegebene Daten die Grössen

$$\frac{(\text{beobachtete Anzahl} - \text{erwartete Anzahl})^2}{\text{erwartete Anzahl}}$$

für alle gegebenen  $k$ , und den Wert der Chi-Quadrat-Teststatistik. Bilde dafür am Schluss die Klasse  $\{k \geq 8\}$ .

- f) Wie entscheidet der Test auf den Niveaus  $\alpha = 5\%$ ,  $1\%$  und  $0.1\%$ ?  
Hinweis: Die Grenzen des Verwerfungsbereich aus einer Chi-Quadrat-Tabelle sind für verschiedene Werte von  $\alpha$ :

**Please turn the page!**

$\alpha$	0.05	0.01	0.001
$c_\alpha$	14.07	18.48	24.32

9. Zwei verschiedene Gewebe werden auf einer Prüfmaschine, die jeweils zwei Gewebestücke in einem Durchgang untersuchen kann, auf Abnutzung getestet. Die Gewichtsverluste bei 10 Durchgängen mit je einer Probe von jedem Gewebe waren in Milligramm

Gewebe	Durchgang Nr.									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	72	52	62	76	57	58	44	55	48	65
B	70	56	61	74	84	79	47	63	80	71

Testen Sie zweiseitig auf dem 5%-Niveau die Hypothese “die beiden Gewebe sind bezüglich Abnutzung gleich” mit einem  $t$ -Test und einem Mann-Whitney-Wilcoxon-Test (Tabelle siehe unten).

Geben Sie mögliche Erklärungen für die Resultate. Welche Schlussfolgerungen ziehen Sie?

	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5
4	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10
5	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14
6		5	6	8	10	11	13	14	16	17	19
7			8	10	12	14	16	18	20	22	24
8				13	15	17	19	22	24	26	29
9					17	20	23	26	28	31	34
10						23	26	29	33	36	39
11							30	33	37	40	44

Tabelle der kritischen Werte der Mann-Whitney- $U$ -Statistik ( $\alpha = 5\%$ )

**Abgabe:** Keine