Prof. K. Nipp D-ITET, D-MATL, RW Sommer 2014

Basisprüfung Lineare Algebra

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand oder mit dem Computer geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe) werden nicht akzeptiert!
- Tragen Sie die Lösung der Aufgabe 6 (Multiple Choice) auf dem Extrablatt ein.

Bitte wenden!

1. **a)** Gegeben sei die Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Matrizen L, R, P der LR-Zerlegung von A.

b) Zeigen Sie, dass für das charakteristische Polynom einer 2×2-Matrix A gilt:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - (\text{Spur } A)\lambda + \det A$$

(Spur $A = a_{11} + a_{22}$).

2. Die vier Punkte in $\mathbb{R}^3$ (Koordinaten x, y, z)

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \;, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

liegen fast auf einer Ebene $z = ax + by + c$, das heisst

$$\begin{aligned} 2a \qquad + c &= 0 \\ b + c &= 0 \\ c &= 2 \\ a + \;\; b + c &= 1\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie a, b, c in $\mathbb{R}$ im Sinne der kleinsten Quadrate.

3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -3 \\ -6 & -3 & 2 \\ 12 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;.$$

Berechnen Sie $y = A^{100}x$.

Siehe nächstes Blatt!

4. **a)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems $\dot{y} = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Menge der Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems $\dot{y} = Ay$ aus Teilaufgabe **a)**, die für $t \to \infty$ beschränkt bleiben.

5. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$.

a) Für welche Werte des reellen Parameters α ist die Abbildung nicht umkehrbar?

b) Bestimmen Sie für $\alpha = \frac{1}{2}$

(i) den Rang von A,

(ii) die Eigenwerte $\lambda \neq 0$ von A.

(iii) eine Basis des Kerns sowie eine Basis des Bildes von A.

6. Multiple Choice:

a) Für Vektoren u, v, w aus einem Vektorraum V gilt: Sind u, v, w linear unabhängig, so sind auch u, v linear unabhängig.

b) Die folgenden Vektoren sind linear abhängig:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Es sei A eine reelle $m \times n$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$. Ist $Ax = b$ lösbar, so gilt $\text{span}\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\} = \text{span}\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}, b\}$, wobei $a^{(i)}$ die i-te Spalte von A bezeichnet.

d) Der Vektor $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ schliesst mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ den Winkel von $\pi/2$ ein.

e) Sei $\mathcal{P}_2$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Die Polynome $P_1(x) = x,\ P_2(x) = (x+1)^2,\ P_3(x) = x^2 + 1,\ P_4(x) = (x-1)^2$ sind linear unabhängig.

f) Für eine orthogonale $n \times n$-Matrix A gilt, $\|A\|_2 = 1$.

Bitte wenden!

g) Sei V ein reeller, endlichdimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und y ein gegebener Vektor aus V. Die Abbildung $f : V \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x) = (y,x) \qquad \text{für alle } x \in V$$

ist linear.

h) Wir betrachten die Singulärwertzerlegung $A = USV^T$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Viel Erfolg!