Dr. V. Gradinaru D-ITET, D-MATL, RW Sommer 2015

Basisprüfung Lineare Algebra

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe) werden nicht akzeptiert!
- Tragen Sie die Lösung der Aufgabe 6 (Multiple Choice) auf dem Extrablatt ein.

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Prüfung	Lineare Algebra	
Datum	19.08.2015	

1	2	3	4	5	6	Punkte

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite, und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift schreiben. Auch nicht mit rot oder grün.
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt!**

Viel Erfolg!

1. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

2. **a)** Ein Experiment ergibt die folgenden Messungen für die unbekannten Grössen x_1, x_2, x_3 und x_4:

$x_1 - x_3$	$x_4 + 3x_3$	$2x_2 - x_1$	$x_1 + x_2 - 2x_3$	$x_3 + x_4$	x_2
4	1	-3	5	-9	7

Die Grössen x_1, x_2, x_3, x_4 sollen durch Ausgleichsrechnung bestimmen werden. Stellen Sie zu diesen Daten die Fehlergleichungen auf und bestimmen Sie die zugehörige Matrix A und den Vektor b, so dass sich das Ausgleichsproblem als
$$Ax = b$$
schreiben lässt.
Hinweis: Sie müssen dieses Ausgleichsproblem nicht lösen.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem
$$Ax = b,$$
für
$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \; b = \sqrt{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$
mit Hilfe der QR-Zerlegung.

Hinweis: Eine mögliche Matrix Q für die QR-Zerlegung ist gegeben als
$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

b) Ist A positiv definit? Begründen Sie.

c) Sei $M = \{x | x^T A x = 1\}$. Entspricht M einer Ellipse? Falls ja, geben Sie zusätzlich die Länge der Halbachsen an.

d) Schreiben Sie einen Matlab-Code, der A erstellt sowie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D berechnet, so dass $A = TDT^{-1}$ gilt.

e) Erweitern Sie ihren Matlab-Code aus **d)**, um damit die Matrixexponentialfunktion $B = e^A$ zu berechnen. Die Funktion `expm` darf dabei *nicht* benutzt werden.

4. Sei $\mathcal{P}^k$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $< k$ für $k \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}^2$ in $\mathcal{P}^3$

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}: & \mathcal{P}^2 & \longrightarrow & \mathcal{P}^3 \\ & f(x) & \longmapsto & \int_0^x f(s)ds \end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Gegeben seien im Urbildraum die Basis 1, x und im Bildraum die Basis 1, x, x^2. Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

c) Gegeben seien im Urbildraum die Basis $1-x$, $2x$ und im Bildraum die Basis 3, $2x$, x^2. Welches ist die neue Matrix B, die $\mathcal{F}$ nach dem Basiswechsel beschreibt?

5. **a)** Gegeben seien die Funktionen $f(x) = e^{-x}$ und $g(x) = e^{-2x}$. Zeigen Sie, dass f und g linear unabhängig sind.
Hinweis: Es kann auch nur **b)** gezeigt werden, da **a)** aus **b)** folgt.

b) Gegeben seien $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n \geq 0$ und die Funktionen

$$f_1(x) = e^{-\alpha_1 x},\ f_2(x) = e^{-\alpha_2 x},\ \ldots,\ f_n(x) = e^{-\alpha_n x}.$$

Zeigen Sie, dass $f_1, f_2, \ldots, f_n$ linear unabhängig sind.
Hinweis: Betrachten Sie den Grenzwert $x \to \infty$.

Bitte wenden!

6. Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen.

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

b) Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem mit m Zeilen und n Spalten. Das Gleichungssystem ist *nicht* für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn $m > n$.

c) Falls die Vektoren $a^{(1)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ *keine* Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden, dann müssen sie linear abhängig sein.

d) Sei A eine quadratische Matrix. Ist x ein Eigenvektor von A, dann ist x auch ein Eigenvektor von A^3.

e) Die Dimension des Kerns von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

beträgt 2.

f) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und weiter sei U, S, V eine Singulärwertzerlegung von A, so dass $A = USV^T$. Dann gilt:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$