Dr. V. Gradinaru D-ITET, D-MATL, RW Sommer 2016

# Basisprüfung Lineare Algebra

**Wichtige Hinweise**

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe) werden nicht akzeptiert!
- Tragen Sie die Lösung der Aufgabe 6 (Multiple Choice) auf dem Extrablatt ein.

| Name | | Note |
|---|---|---|
| Vorname | | |
| Studiengang | | |
| Leginummer | | |
| Prüfung | Lineare Algebra | |
| Datum | 17.08.2016 | |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Punkte |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | | | | | | |

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite, und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift schreiben. Auch nicht mit rot oder grün.
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt!**

Viel Erfolg!

**1.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 0 & -2 & \beta \end{bmatrix}.$$

**a)** Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so dass die Spaltenvektoren von $A$ orthogonal sind.

**b)** Mit den Werten $\alpha$ und $\beta$ wie in **a)**:

1. Berechnen Sie eine QR-Zerlegung von $A$.
2. Berechnen Sie $|\det(A)|$.

**2.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

**a)** Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und die zugehörigen Eigenvektoren $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ von $A$.

**b)** Zeigen Sie dass $x^T Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ und dass $x = 0$ falls $x^T Ax = 0$.

**c)** Beweisen Sie, dass die Eigenvektoren $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

**3.** Gegeben sei die Ebene $U \subset \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$U := \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

**a)** Berechnen Sie die Spiegelung $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ bezüglich der Ebene $U$.

*Hinweis: Berechnen Sie zuerst einen zur Ebene $U$ normalen Vektor $u \in \mathbb{R}^4$.*

**b)** Gegeben seien im Urbildraum die Basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

und im Bildraum die Basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\},$$

durche welche Matrix $B$ wird in diesem Fall $A$ beschrieben?

**Siehe nächstes Blatt!**

**4. a)** Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$ und eine Singulärwertzerlegung $A = USV^T$ von $A$. Wir betrachten für $b \in \mathbb{R}^n$ das folgende Ausgleichsrechnungsproblem: finde $x \in \mathbb{R}^n$ so dass

$$r := Ax - b$$

minimal wird. Zeigen Sie, dass

$$\|r\|_2^2 = \|\hat{S}V^T x - d_0\|_2^2 + \|d_1\|_2^2,$$

wobei $\hat{S} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $d_0 \in \mathbb{R}^n$ und $d_1 \in \mathbb{R}^{m-n}$ definiert sind durch

$$S = \left[\begin{array}{c} \hat{S} \\ \hline 0 \end{array}\right], \qquad U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}.$$

**b)** Für ein Experiment betrachtet man das folgende Model

$$y = \beta_1 \sin(x) + \beta_2 \cos(x).$$

Zur Bestimmung der Parameter $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ liegen die folgende Messungen für $y_i$, $i = 1, 2, 3$, vor:

| $x_i$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|
| $y_i$ | $\sqrt{2}$ | $1$ | $1$ |

Es sollen die Parameter $\beta_1$ und $\beta_2$ so bestimmt werden, dass $\sum_{i=1}^{3} |\beta_1 \sin(x_i) + \beta_2 \cos(x_i) - y_i|^2$ minimal wird.

Schreiben Sie dies als ein Ausgleichungsproblem der Form

$$A\beta = b$$

und lösen Sie es mit Hilfe der Singulärwertzerlegung.

**5.** Wir betrachten auf dem Vektorraum

$$\mathcal{L}^2[-1,1] := \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\},$$

das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt, \qquad f, g \in \mathcal{L}^2[-1,1].$$

**a)** Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt über $\mathbb{R}$ definiert.

**b)** Wir betrachten die Funktionen $f_k(t) = \sin(\pi k t)$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $f_k \in \mathcal{L}^2[-1,1]$ orthonormal bezüglich dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind.

*Hinweis: Für* $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt* $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$.

**c)** Zeigen Sie, dass die Vektoren $f_k \in \mathcal{L}^2[-1,1]$ linear unabhängig sind.

**d)** Was ist die Dimension von $\mathcal{L}^2[-1,1]$?

**Bitte wenden!**

**6.** Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen.

**a)** Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

**b)** Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ so dass $Av = 0$. Dann kann das Gleichungssystem $Ax = b$ *nicht* für beliebige rechte Seite $b$ lösbar sein.

**c)** Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n$ Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ungleich null. Dann gilt $\det(A) \neq 0$.

**d)** Gegeben sei eine orthogonale Matrix $A$. Dann gilt $\det(A) = 1$.

**e)** Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^4$ definiert durch

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & \mathcal{P}^3 & \longrightarrow & \mathcal{P}^4 \\ & f(x) & \longmapsto & \frac{d}{dx}\left(x^2 f(x)\right) \end{array}$$

ist linear.

**f)** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

und weiter sei $U, S, V$ eine Singulärwertzerlegung von $A$, so dass $A = USV^T$. Dann gilt:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$