Dr. V. Gradinaru D-ITET, D-MATL, RW Sommer 2017

Basisprüfung Lineare Algebra

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet (jeweils 6 Punkte).
- Begründen Sie Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe) werden nicht akzeptiert!
- Tragen Sie die Lösung von Aufgabe 6 (Multiple Choice) auf dem Extrablatt ein.

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Prüfung	Lineare Algebra	
Datum	21.8.2017	

1	2	3	4	5	6	Punkte

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite, und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift schreiben. Auch nicht mit rot oder grün.
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt!**

Viel Erfolg!

1. (6 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

2. (6 Punkte) Gegeben sei das Ausgleichsproblem: finde $x \in \mathbb{R}^2$ so dass

$$x = \arg\min_{v \in \mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2, \tag{1}$$

wobei

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Lösen Sie (1) mithilfe einer Singulärwertzerlegung.

b) Schreiben Sie die Normalengleichungen für (1) in kompakter Form und lösen Sie sie.

3. (6 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -12 \\ 0 & -13 & 30 \\ 0 & -9 & 20 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$.

b) Bestimmen Sie $\ker(A)$ und $\mathrm{Bild}(A)$.

4. (6 Punkte) Für alle $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ sei $r_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $r_i(t) = t^i$. Sei $\mathcal{G}_3 = \mathrm{span}\{r_0, r_2, r_4\}$ und $\mathcal{U}_2 = \mathrm{span}\{r_1, r_3\}$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}\colon \mathcal{G}_3 \to \mathcal{U}_2$ definiert für alle $x \in \mathcal{G}_3$ und alle $t \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{cases} x \mapsto \mathcal{A}(x), \\ \mathcal{A}(x)(t) = tx''(t). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben, wenn wir die Monome als Basen in beiden Räumen verwenden?

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}_3$ und $\mathcal{U}_2$ sind, wobei $p_1(t) = 1 + t^2$, $p_2(t) = 1 - t^2$, $p_3(t) = 1 + t^2 + t^4$, $q_1(t) = t$ und $q_2(t) = 3t + 2t^3$.

d) Welches ist die neue Matrix B, die $\mathcal{A}$ nach diesem Basiswechsel (die neuen Basen sind in **c)** gegeben) beschreibt?

5. **(6 Punkte)** Gegeben ist für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} .$$

a) Zeigen Sie, dass $b - a$ ein Eigenwert von A ist.

b) Bestimmen Sie die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert $b - a$.

c) Finden Sie einen Eigenvektor zu einem Eigenwert $\lambda \neq (b - a)$ von A.

6. **(6 Punkte)** Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen.

a) Es bezeichne $i = \sqrt{-1}$ eine komplexe Einheitswurzel. Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

ist unitär.

b) Gegeben sei ein Erzeugendensystem $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ von V mit $\dim(V) = n$. Dann sind die Vektoren $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ linear unabhängig.

c) Gegeben seien eine invertierbare Matrix S und Diagonalmatrizen D_1 und D_2. Für $A = SD_1S^{-1}$ und $B = SD_2S^{-1}$ gilt $(A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$.

d) Für eine symmetrische Matrix A definiert $x^T Ay$ ein Skalarprodukt.

e) Eine QR-Zerlegung angewandt auf die Matrix A liefert die Rechtsdreiecksmatrix

$$R = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Daraus folgt $\det(A) = 36$.

f) Wir betrachten die Drehungsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ v &\longmapsto Av. \end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{F}$ ein Isomorphismus.